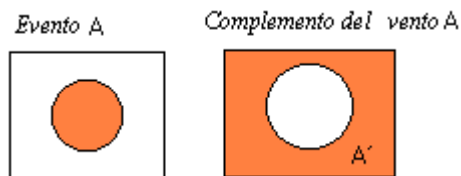


Postulados de probabilidad

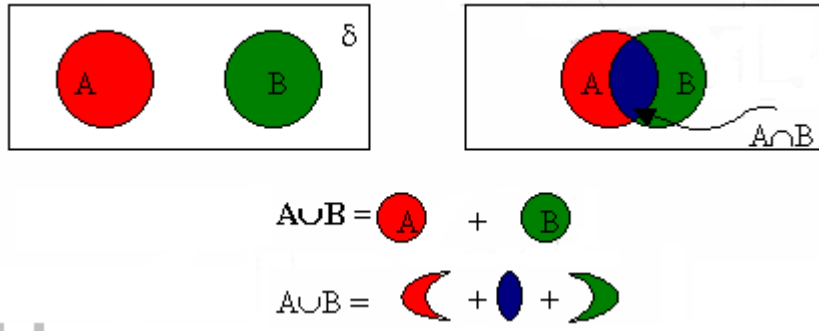
Diagramas de Venn

Es un diagrama para representar los espacios muestrales y los eventos. El espacio muestral se representa por medio de un rectángulo y los eventos por medio de círculos o partes de círculos dentro del rectángulo.

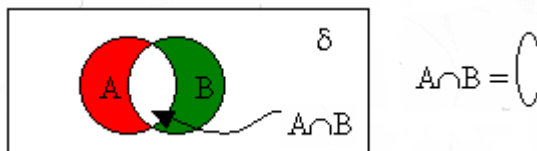
El **complemento** de X , denotado por X' , es el evento que consta de todos los elementos (resultados) del espacio de muestreo que no están contenidos en X .



La **unión** de dos eventos, A y B , representada como $A \cup B$ Es el evento que ocurre si y solo si A ocurre o B ocurre o ambos ocurren.



La **intersección** A y B , representada por $A \cap B$ es el evento que ocurre si y solo si A y B ocurren a un mismo tiempo.



Postulados de probabilidad

Ahora consideraremos el aspecto de la forma en que se deben de “comportar” las probabilidades; comenzaremos enunciando los tres postulados básicos. Representamos los eventos por medio de letras mayúsculas y escribiremos la probabilidad del evento A como $P(A)$, la probabilidad del evento B como $P(B)$, etc. y el conjunto de todos los resultados posibles (espacio muestral finito) por medio de la letra S . Los tres postulados de probabilidad son:

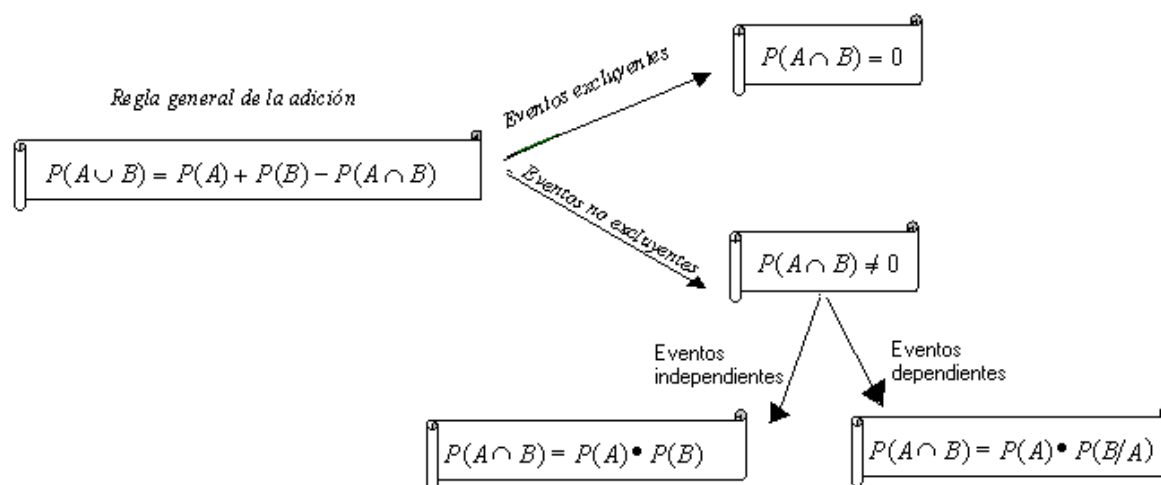
- I. La probabilidad de un evento cualquiera es un número real positivo o cero; simbólicamente, en relación con un evento A cualquiera.

$$P(A) \geq 0$$

- II. La probabilidad de un espacio muestral cualquiera es igual a 1; simbólicamente, $P(S) = 1$

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(n) = 1$$

- III. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro es igual a la suma de sus probabilidades.



Entre las consecuencias inmediatas de los tres postulados tenemos que las probabilidades nunca pueden ser mayores que uno, que un evento que no puede ocurrir tiene la probabilidad 0 y que las probabilidades de que un evento ocurra o no ocurra siempre suman 1.

$$P(A) \leq 1 \quad \text{en relación con un evento } A \text{ cualquiera}$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) + P(A' \cap B') = 1$$

Como el tercer postulado sólo se aplica a eventos mutuamente excluyentes **no** puede utilizarse, por ejemplo, para determinar la probabilidad de que cuando menos uno (o ambos) de dos compañeros de cuarto apruebe un examen final de economía, la probabilidad de que una persona se fracture un brazo o una costilla en un accidente de automóvil, o bien la probabilidad de que un cliente compre una camisa en Macy's. Ambos compañeros de cuarto pueden aprobar el examen; una persona puede fracturarse un brazo y una costilla; y un cliente puede comprar una camisa y una corbata.

Si se tienen tres eventos cualquiera A , B y C , la probabilidad de que cuando menos ocurra uno de ellos está dada por

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Eventos excluyentes

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Ejemplo

En un salón de clase hay 15 alumnos, 7 de los cuáles son de tercer semestre, 5 son de cuarto semestre y 3 son de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química, de los cuales 4, 2 y 1 respectivamente dominan el Inglés, si se selecciona un alumno al azar de este grupo,

- ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de quinto semestre?
- ¿cuál es la probabilidad de que sea de tercero o cuarto semestre?
- ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de tercer semestre y domine el inglés?
- ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no domine el inglés?
- Di si los eventos T y Q son mutuamente excluyentes, di si los eventos Q e I son mutuamente excluyentes?



T = evento de que un alumno sea de tercer semestre

Cu = evento de que un alumno sea de cuarto semestre

Q = evento de que un alumno sea de quinto semestre

I = evento de que un alumno domine el inglés

a) $p(\text{alumno seleccionado sea de quinto semestre}) = p(Q) = 3/15 = 0.2$

b) $p(\text{alumno seleccionado sea de tercero o cuarto semestre}) = p(T \cup Cu) = p(T) + p(Cu)$
 $= 7/15 + 5/15 = 12/15 = 0.8$

c) $p(\text{alumno sea de tercer semestre y domine el inglés}) = p(T \cap I) = 4/15 = 0.26667$

d) $p(\text{alumno seleccionado no domine el inglés}) = p(I') = 8/15 = 0.53333$

e) Los eventos T y Q son mutuamente excluyentes dado que $T \cap Q = \emptyset$

Los eventos Q e I no son eventos mutuamente excluyentes, ya que $Q \cap I = \{1\}$

Ya que hay un alumno que cumple con ambos eventos, es de quinto semestre y domina el inglés.

Ejemplo

En una competencia de nado sincronizado, participan los equipos de Ecuador, México y Venezuela, México tiene el doble de posibilidades de ganar que Ecuador, mientras que Venezuela tiene un tercio menos de posibilidades de ganar que Ecuador:

- Determina la probabilidad de que gane Venezuela.
- Determina la probabilidad de que gane Ecuador o Venezuela.
- Determina la probabilidad de que no gane México.



Espacio muestral = {Ecuador, México Venezuela}

$$P = p(\text{gane Ecuador}) + p(\text{gane México}) + p(\text{gane Venezuela}) = p + 3p + 2/3p = 1$$

Como $14/3p = 1$, luego $p = 3/14$

a) $p(\text{gane Venezuela}) = 2/3 p = 2/3 * 3/14 = 2/14 = 1/7 = 0.14285$

b) $p(\text{gane Venezuela o Ecuador}) = p(\text{gane Venezuela}) + p(\text{gane Ecuador}) = 2/3p + p = 5/3p$
 $= 5/3 * 3/14 = 5/14 = 0.35714$

c) $p(\text{no gane México}) = p(\text{gane Venezuela o Ecuador}) = 1 - p(\text{gane México}) = 1 - 3p$
 $= 1 - 3(3/14) = 1 - 9/14 = 5/14 = 0.35714$

Ejemplo

En una competencia de ciclismo participan A, B y C, A tiene el doble de posibilidades de ganar que B y B el doble que C.

- Determina la probabilidad de que gane B.
- Determina la probabilidad de que gane A o B.



$d = \{A, B, C\}$, y por ser un espacio finito de probabilidad,
 $p(d) = p(\text{gane } A) + p(\text{gane } B) + p(\text{gane } C) = 4p + 2p + p = 1$
 Como $7p = 1$, luego, $p = 1/7$
 a) $p(\text{gane } B) = 2p = 2(1/7) = 2/7 = 0.28571$
 b) $p(\text{gane } A \text{ o } B) = 4p + 2p = 6p = 6(1/7) = 6/7 = 0.85714$

Ejemplo

En un lote de producción que consta de 20 computadoras personales de cierta marca, se ha detectado que 4 tienen defectos de tipo operacional. Si se selecciona al azar una computadora:

- Determina la probabilidad de que la computadora seleccionada tenga defectos de tipo operacional.
- ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos de tipo operacional?



Espacio muestral = $\{20 \text{ computadoras}\}$

- $A = \text{evento de que una computadora tenga defectos de tipo operacional}$
 $p(A) = 4/20 = 0.2$
- $B = \text{evento de que una computadora no tenga defectos de tipo operacional}$
 $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0.2 = 0.8$

Ejemplo

Se seleccionan dos números al azar de entre los dígitos del 1 al 9,

- Determina la probabilidad de que ambos números seleccionados sean pares,
- Determina la probabilidad de que ambos números sean impares.



Para obtener el espacio muestral de este problema podemos hacer uso de un diagrama de árbol en donde se represente la selección del primer número y luego la del segundo número, encontrándose que los pares de números a elegir serían 36, como se muestran a continuación.

$(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) (6,7) (7,8) (8,9)$
 $(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,8) (7,9)$
 $(1,4) (2,5) (3,6) (4,7) (5,8) (6,9)$
 $(1,5) (2,6) (3,7) (4,8) (5,9)$
 $(1,6) (2,7) (3,8) (4,9)$
 $(1,7) (2,8) (3,9)$
 $(1,8) (2,9)$
 $(1,9)$

- a. $A =$ evento de que los dos números seleccionados sean pares, $A = \{(2,4), (2,6), (2,8), (4,6), (4,8), (6,8)\}$, por lo tanto $p(A) = 6/36 = 1/6 = 0.1667$
- b. $B =$ evento de que los dos números seleccionados sean impares, $B = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (3,5), (3,7), (3,9), (5,7), (5,9), (7,9)\}$, $p(B) = 10/36 = 5/18 = 0.2778$

Ejemplo

Dada la siguiente tabla referente a la producción de flechas para camión de carga pesada; se inspeccionan 200 flechas del tipo A y B, 300 del tipo C y 400 del tipo D.

Se selecciona una flecha al azar de las inspeccionadas, determina la probabilidad de que:

- La flecha seleccionada sea del tipo B.
- la flecha seleccionada no tenga defectos.
- La flecha seleccionada tenga defectos del tipo II.
- La flecha seleccionada tenga cualquier tipo de defecto.



a continuación se presentan los resultados obtenidos en la inspección

TIPO DE FLECHA

DEFECTO	A	B	C	D	TOTAL
I	54	23	40	15	132
II	28	12	14	5	59
S-DEF	118	165	246	380	909
TOTAL	200	200	300	400	1100

- $p(\text{flecha sea tipo B}) = 200/1,100 = 0.18182$
- $p(\text{flecha no tenga defectos}) = 909/1,100 = 0.82636$
- $p(\text{flecha con defectos del tipo II}) = 59/1,100 = 0.05363$
- $p(\text{flecha tenga cualquier tipo de defecto}) = p(\text{def tipo I}) + p(\text{def tipo II}) = 132/1,100 + 59/1,100 = 0.17364$