

# SEP INSTITUTO TECNOLÓGICO de celaya

OFICIO NO. I.Q./0068/97

Asunto: Aprobación de Impresión  
de Tesis de Maestría

19 de Mayo de 1997.

Dr. Rafael Chávez Contreras  
Jefe del Depto. de Ingeniería Química  
Presente.

De acuerdo con la convocatoria hecha por esa Jefatura a su digno cargo con el fin de determinar si se aprueba la impresión del proyecto de tesis de Maestría, titulado: "Control de bifurcaciones en sistemas dinámicos no lineales", presentado por el C. ALAN VAZQUEZ MARTINEZ comunico a Usted que esta Comisión Revisora de Tesis ha tenido a bien aprobar la impresión de este trabajo.

Lo anterior, para los efectos consiguientes.

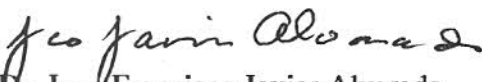
Atentamente,



Dr. Ramiro Rico Martínez  
Presidente



Dr. Rafael Chávez Contreras  
Secretario



Dr. Juan Francisco Javier Alvarado  
Vocal



Dr. Arturo Jiménez Gutiérrez  
Suplente

Departamento de Ingeniería Química  
Av. Tecnológico y Antonio García Cubas,  
A.P. 57 C.P. 38010 Celaya, Gto.  
Tels. (461) 1.75.75 y 1.78.02  
Exts. 130, 131 y 203  
Fax (461) 1.77.44



INSTITUTO TECNOLOGICO DE CELAYA

Departamento de Ingeniería Química.

Tesis de Maestría

**CONTROL DE BIFURCACIONES  
EN SISTEMAS DINAMICOS  
NO LINEALES**

Dirigida por: Dr. Ramiro Rico Martínez

Presentada por: Alan Vázquez Martínez

Celaya, Gto. Junio de 1997.

# Dedicatoria

Quisiera dedicar este trabajo primeramente a Dios quien sigue dándome a manos llenas.

A mis padres Juan Vázquez Magía y Lucía Martínez de Vázquez por su infinito amor y apoyo incondicional ahora y siempre, Gracias!

A los mejores amigos que Dios me dió, mis hermanos Joel, Juan Cecilio, Hugo y Rodrigo.

A mis profesores y personal del Depto. de Ing. Química del Tec. quienes dan lo mejor de sí con profesionalismo y ética, especialmente a Dr. Ramiro Rico, Dr. Fco. Javier Alvarado, Dr. Gustavo Iglesias, Dra. Cristina Coronado, Dr. Alberto Ochoa, Dr. Guillermo González, Dr. Arturo Jiménez y Dr. Rafael Chávez.

A los estudiantes del posgrado en I. Q. del Tec., muy especialmente a aquellos con quienes me tocó la suerte de convivir desvelos y alegrías: Pelos, Gualo, Rabul, Chore, Don Unix, y mi'jo.

A mis amigos de quienes siempre tengo algo que aprender, Miguel A. y Gloria, Mata y Lolita, Sergio y Cris, Roberto R. y Lety, Carlos Lara y Familia, Carlos Monreal Y Familia, Pepe Zarate, Edgar Lemaire, José Luis G. y Aracely, y Felipe Cerino.

A mi esposa Fabiola Herrera Enciso quien me ha acompañado  
desde que la conocí y a quien amo.

A mi hija Diana quien es lo más maravilloso que me ha pasado.



# Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer término a mi asesor y profesor Dr. Ramiro Rico en quien he encontrado no sólo a un maestro y guía de Tesis, sino también a un amigo sincero y generoso quien varias veces me aconsejó y dió parte de su sabiduría que me ayudaron a resolver problemas aún fuera del índole profesional. Por todo ello estoy en deuda con Ud. mil Gracias.

Tambien agradezco la ayuda de mi “carnal” Raúl sin la ayuda de quien, este trabajo aún no hubiera concluido, muchas gracias!.

Asimismo, deseo agradecer al Prof. Ioannis G. Kevrekidis por sus comentarios que enriquecieron el trabajo.

Este trabajo fue parcialmente financiado por el CONACyT, COSNET y la SEP. Por ello, gracias por su apoyo.

Todo caos lleva consigo cierto orden, que puede ser ilógico. Para entenderlo hay que analizar sus causas particulares y después las generales para darnos cuenta de que una cosa lleva a la otra. Lo mas sorprendente es, sin embargo, que tal ilógica gobierna los eventos que llamamos lógicos y gracias a este caos sabemos a que llamarle orden.

A.V.M.

# CONTROL DE BIFURCACIONES EN SISTEMAS DINAMICOS NO LINEALES

Alan Vázquez Martínez

Asesor: Dr. Ramiro Rico Martínez

## Resumen

El objetivo del presente trabajo es el de analizar las relaciones que guardan los parámetros de un tipo particular de controlador, con la estabilidad de las soluciones presentadas por el sistema de estudio. Esto se logra por medio de la caracterización geométrica de los espacios-fases generados por la respuesta dinámica del sistema.

Dado que en los procesos químicos la no linealidad es una ocurrencia común. El comportamiento de dichos sistemas puede ser asintóticamente estable, periódico o aún más complicado (caótico). El comportamiento que presentan los sistemas no lineales puede ser caracterizado, desde un punto de vista geométrico, mediante la construcción de diagramas de bifurcación (inestabilidades y sus transiciones). El estudio de estos sistemas con fines de control puede basarse en la caracterización paramétrica de los espacios-fase generados por la respuesta del sistema;

como consecuencia, el diseño de controladores puede formularse en función de la alteración en la localización de bifurcaciones. Esto puede lograrse mediante los denominados *filtros de lavado*. Se considera un sistema que depende de un parámetro simple como medio para ilustrar el uso de dichos filtros. El sistema es un modelo para el control de un lazo de convección térmica y es un caso especial del sistema de Lorenz.

# Indice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>4</b>
2.1	Sistemas Dinámicos No Lineales . . . . .	5
2.2	Bifurcaciones Locales . . . . .	24
2.2.1	Eigenvalor cero . . . . .	26
2.2.2	Bifurcación de Hopf . . . . .	34
2.3	Bifurcaciones Globales . . . . .	38
2.4	Control Retroalimentado con uso de Filtros de Lavado . . . . .	40
2.5	Software . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Sistema de Estudio</b>	<b>46</b>
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>55</b>
4.1	Análisis de Diagramas de Dos Parámetros . . . . .	56
4.2	Análisis de los Eigenvalores . . . . .	60

<b>5 Conclusiones</b>	<b>66</b>
5.1 Trabajo Futuro. . . . .	68

# Indice de Figuras

2.1	Variedades para un sistema lineal. . . . .	10
2.2	Degeneración de un nodo estable. . . . .	13
2.3	Tipos de estructuras . . . . .	18
2.4	Diagramas de Argand . . . . .	19
2.5	Geometría esperada en 3D . . . . .	21
2.6	Función de Liapunov . . . . .	23
2.7	Geometría de Bifurcaciones Locales . . . . .	28
2.8	Bifurcación de Hopf . . . . .	37
3.1	Aparato experimental; toroide de convección térmica. . . . .	47
3.2	Diagrama de bifurcación del lazo abierto. . . . .	48
3.3	Espacios-fase de (a)Transiente caótico, y (b)Atractor caótico. . . .	50
3.4	Curvas integrales de (a)Transiente caótico, y (b)Atractor caótico.	51
3.5	Respuesta del lazo cerrado. . . . .	54
4.1	Diagrama de dos parámetros, vista parcial. . . . .	57

4.2	Diagrama extendido de dos parámetros. . . . .	59
4.3	Espacios fases caracterizados. . . . .	61



# Capítulo 1

## Introducción

Existen muchos y muy variados sistemas dentro de la fenomenología de la Ingeniería Química en los cuales, debido a su carácter no lineal, se da la presencia de comportamiento complicado. La presencia de múltiples estados estacionarios es tal vez la expresión más familiar de la no linealidad; sin embargo, la respuesta dinámica de tales sistemas puede exhibir comportamientos mucho más complejos: soluciones periódicas, quasi-periódicas y caos [33, 35].

Más aún, dadas las altas demandas de funcionamiento que actualmente se requieren de los equipos, se está empujando a los mismos hacia sus propios límites de operación, lo que resulta en operación sobre regímenes con comportamiento complicado. Sin embargo, esta condición “estresada” de operación, en algunas ocasiones resulta benéfica; por ejemplo, puede ocasionar turbulencia en un proceso de mezclado, el cual dará como resultado una mayor eficiencia en el transporte de

calor y/o masa. En otras ocasiones es un fenómeno indeseable que puede conducir a vibraciones, producir oscilaciones de temperatura que pueden exceder los límites de seguridad, etc. En muchos de tales casos (si no es que en todos), es deseable la manipulación de dichos sistemas con propósitos de control.

Claramente nuestra habilidad de controlar sistemas dinámicos no lineales (de promover o eliminar sus efectos), tiene una gran importancia práctica. Por ello, no es de extrañarse por el reciente desarrollo y auge que ha tenido el estudio sobre el control de los mismos [1, 3, 19, 21, 23, 35].

El comportamiento que presentan los sistemas no lineales puede ser caracterizado, desde un punto de vista geométrico, mediante la construcción de diagramas de bifurcación. El estudio de estos sistemas con fines de control puede basarse en la caracterización paramétrica de los espacios-fases generados por la respuesta del sistema. Como consecuencia de esto, el diseño de controladores puede formularse en función de la alteración en la localización de bifurcaciones. Esto puede lograrse mediante los denominados *filtros de lavado*. En el presente trabajo consideraremos un sistema que depende de un parámetro simple como medio para ilustrar el uso de dichos filtros.

El sistema es un modelo para el control de un lazo de convección térmica, y el objetivo de este estudio es el de analizar las relaciones que guardan los parámetros del controlador y la estabilidad de las soluciones que el sistema presenta, caracterizando el subespacio paramétrico como primer paso hacia la generalización de

la aplicación.

En el capítulo siguiente hacemos una recopilación de los conceptos más relevantes en el desarrollo del presente trabajo. Este se ha dividido en cuatro secciones de antecedentes que tienen una secuencia lógica en la aplicación de esta teoría en la tesis; comenzando con *sistemas dinámicos no lineales* donde se dan los conceptos y diferentes tipos de estructuras con los que trataremos. Después se describen los diferentes tipos de *bifurcaciones locales* y sus formas matemáticas normales, para pasar a discutir, muy brevemente, las *bifurcaciones globales*. La teoría del uso de *control retroalimentado utilizando filtros de lavado* aparece como una parte de este capítulo. Finalmente se hace una breve descripción del *software* utilizado en la caracterización de los espacios-fases del sistema de estudio.

En el capítulo tres se detalla la descripción del *sistema de estudio* y se esquematiza el aparato físico que es base para el modelamiento del mismo, dando un panorama general de lo que ha sido caracterizado previamente y de lo que será el desarrollo del presente trabajo. En el capítulo cuatro, se presentan los *resultados* obtenidos por las simulaciones llevadas a cabo en forma de diagramas de dos parámetros, y la caracterización geométrica de sus respectivas zonas mediante diagramas de bifurcación y de los espacios-fases generados; así como un breve análisis de los eigenvectores de cada espacio. Las *conclusiones* del trabajo y sugerencias o recomendaciones que se hacen sobre la dirección de la investigación futura se dan en el capítulo cinco.

# Capítulo 2

## Antecedentes

No es difícil identificar la gran variedad de sistemas no lineales que podemos encontrar en el modelamiento de los mismos dentro de la Ingeniería Química [33]. Recordemos tan solo los casos estudiados en cualquier curso de Ingeniería de Reactores, por poner un ejemplo. Estos sistemas se han venido trabajando (en cuanto a su control), por medio de los métodos clásicos de control linealizados [31]. Estas metodologías consisten básicamente, en el manejo de la linealización del modelo dentro de un rango alrededor de un punto estacionario; trabajando luego la respuesta de dicho modelo en función del tiempo. Sin embargo, se tiene la gran desventaja de que las soluciones a tales métodos dependen de que tan alejados nos encontremos de éste punto, existiendo casos en los cuales no es necesario alejarse demasiado de dicho punto para que nuestra solución comience a ser incorrecta y/o difícil de trabajar.

Por lo anterior, y buscando tener puntos de referencia en cuanto al control de tales sistemas dentro de rangos mayores de aceptación para su funcionamiento, es necesario adentrarnos un poco en el comportamiento de los sistemas no lineales. Es decir, necesitamos llegar a comprender la geometría de la respuesta dinámica de dichos sistemas, aún cuando en ocasiones debamos reconocer que no hay mucho que podamos hacer respecto a dicha respuesta.

## 2.1 Sistemas Dinámicos No Lineales

En general, podemos representar un sistema no lineal como:

$$\dot{x} = f(x, t; \mu) \quad (2.1)$$

con  $x \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$  y  $\mu \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^p$ ; donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^p$  respectivamente. El sobre-punto en (2.1) representa  $d/dt$  y vere nos a las variables  $\mu$  como los parámetros del sistema. También, nos referiremos a (2.1) como un campo vectorial ó conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen nuestro sistema.

Por una solución de (2.1),  $\bar{x}$ , denotaremos un mapa de algun intervalo  $I \subset \mathbb{R}^1$  dentro de  $\mathbb{R}^n$  que se representa:

$$\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x(t) \quad (2.2)$$

tal que  $x(t)$  satisface (2.1):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t; \mu) \quad (2.3)$$

Así,  $\bar{x}$  tiene la interpretación geométrica de una curva en  $\mathbb{R}^n$ , y (2.1) nos da un vector tangente en cada punto de dicha curva.

Nos referiremos al espacio de variables dependientes de (2.1) como su *espacio-fase*. También nos referiremos a la *curva integral* como la gráfica de  $\bar{x}(t, x; \mu)$  sobre  $t$ . Asimismo, nos referiremos a la *órbita* de  $(\bar{x})$ , (denotada como  $\mathbf{O}(\bar{x})$ ) al conjunto de puntos en el espacio-fase que caen en una trayectoria que pasa por  $\bar{x}$ , siendo  $\bar{x}$  un punto en el espacio-fase de (2.1). Identificaremos a un *sistema autónomo* como aquel sistema que es independiente del tiempo (no depende del mismo en forma explícita), y un *sistema no autónomo* como aquel que si lo es. Así, considerando un campo vectorial autónomo en general:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

tenemos que un *punto de equilibrio* de (2.4) es un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que;

$$f(\bar{x}) = 0, \quad (2.5)$$

es decir, una solución que no cambia con el tiempo. Otros términos que fre-

cuentemente encontramos para *punto de equilibrio* son “*punto fijo*”, “*punto estacionario*”, “*singularidad*”, “*punto crítico*” ó “*estado estable*”. Debemos tener en cuenta que nuestra curva solución puede depender tanto de nuestros parámetros como de nuestras condiciones iniciales.

Desde un punto de vista geométrico y en forma abstracta, nuestra meta en el estudio de sistemas dinámicos no lineales, es entender y caracterizar la geometría de las curvas solución en el espacio-fase generado por la respuesta dinámica del sistema. Debemos entender el comportamiento de un sistema dinámico no lineal a fin de poder determinar la estabilidad ó inestabilidad del mismo en un punto solución ó punto de equilibrio; así como analizar lo que sucede con dicha dinámica cuando los parámetros son variados, buscando caracterizar los cambios en la estructura de las órbitas; todo esto, con fines de control (en este caso).

Así, una vez que tenemos cualquier solución de (2.4), debemos determinar si esta es estable o no. Sin embargo debemos definir primero el comportamiento dinámico que esperaremos de un punto estable y de uno inestable, aún cuando esto pueda resultar aplicable solo a los fines que perseguimos. Por estabilidad entenderemos aquel comportamiento de un punto de equilibrio que comenzando “cerca” de  $\bar{x}(t)$  a un tiempo determinado, permanece “cerca” para cualquier tiempo futuro (*estabilidad de Liapunov*), ó que tiende a  $\bar{x}(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (*estabilidad asintótica*), en las obras de Wiggins y Guckenheimer y Holmes [36, 15] se pueden encontrar definiciones matemáticas rigurosas de estos conceptos.

Para poder predecir la estabilidad (ó inestabilidad) de cualquier punto de equilibrio, debemos referirnos a los eigenvalores del Jacobiano de nuestro sistema linealizado en dicho punto ( $Df(\bar{x})$ ), ya que el sistema lineal asociado tiene que ver con el comportamiento de las soluciones arbitrariamente cerca de  $\bar{x}(t)$  puesto que describen la evolución de las órbitas alrededor de este punto. De hecho, si los eigenvalores del campo vectorial lineal asociado poseen partes reales diferentes de cero, la órbita estructural cercana a una solución de equilibrio del campo vectorial no lineal es esencialmente el mismo, o en otras palabras, el espacio-fase local cerca de un punto fijo hiperbólico es *topológicamente equivalente* al espacio-fase local de la linealización (Teorema de Hartman-Grobman, ver Guckenheimer y Holmes [15]). Esta es la razón principal por la que cuando nos estemos refiriendo a estabilidad, lo estaremos haciendo en forma local, es decir, estamos hablando de *estabilidad local* a menos que se indique otra cosa, y definiremos la *estabilidad estructural* como aquella en la que topológicamente no existe cambio bajo una perturbación infinitesimal de los parámetros de operación.

Para facilitar nuestra discusión sobre el comportamiento dinámico de sistemas no lineales, y ver un poco con mas detalle lo hasta ahora expuesto, consideremos el siguiente ejemplo lineal, que para hacerlo mas simple se ha escogido de dos dimensiones (mas adelante generalizaremos y haremos la conexión lineal-no lineal):

$$\dot{x} = ax + by \tag{2.6}$$



$$\dot{y} = cx + dy \quad (2.7)$$

el cual puede también ser representado en una sola ecuación vectorial de la forma:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{x} \quad (2.8)$$

donde claramente:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cualquier punto solución que haga que  $\dot{\underline{x}} = 0$ , (tal como  $\underline{x} = 0$  en este caso), es un punto estacionario; y lo que nos resta será ver que tipo de estabilidad-inestabilidad presentará el sistema. Para ello analizaremos el espacio-fase generado cuando:  $a = a, b = c = 0$  y  $d = -1$  de tal modo que:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\dot{x} = ax \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{at} \quad (2.9)$$

$$\dot{y} = -y \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{-t} \quad (2.10)$$

Dado que uno de los exponentes es siempre negativo podemos esperar que, graficando el espacio-fase ( $x$  v.s.  $y$ ) siempre tendremos al menos una dirección que nos conduzca al punto fijo, por lo que analizaremos el comportamiento en dicho espacio-fase cuando “ $a$ ” es variado, y lo que observaremos será uno de los 5 casos esquematizados en la Figura 2.1, dependiendo del valor que tome “ $a$ ”:

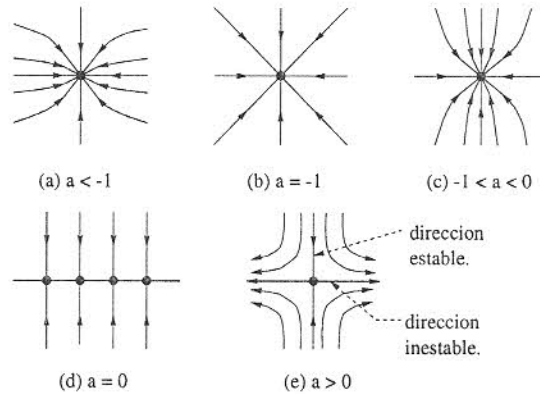


Figura 2.1: *Diferentes tipos de comportamiento que presenta el sistema lineal en función de la variación del coeficiente  $a$ .*

Podemos observar que del inciso (a) al (c) tendremos básicamente un punto globalmente atrayente que solo variará en que tan rápido será una dirección de aproximación al punto estacionario respecto a la otra, es decir diferentes entre si solo en que tan rápido se acercan al mismo. Y diremos que son estables porque tienden al punto de equilibrio. Cuando  $a = -1$ , inciso (b), ambas direcciones tendrán la misma velocidad de aproximación; y en general, veremos que a menor valor en  $a$ , mayor será la velocidad de aproximación de la dirección correspondiente. Cuando  $a = 0$ , inciso (d), desaparece una dirección de aproximación al estado estacionario, y finalmente en el inciso (e) dicha dirección se vuelve *inestable*

(pues tiende a alejarse del punto fijo) y como habrá una dirección estable y una inestable, el punto fijo se vuelve del tipo *silla*.

Continuaremos con sistemas dinámicos no lineales para dar unas definiciones que utilizaremos para determinar la estabilidad (ó inestabilidad) de un punto fijo para después adentrarnos un poco en las condiciones que se cumplen en los cambios cualitativos en la geometría de la respuesta dinámica del sistema en forma local y global (*bifurcaciones locales y globales* respectivamente).

Sea  $\bar{x}$  un punto fijo de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\bar{x}$  es un *punto fijo hiperbólico* si ninguno de los eigenvalores de  $Df(\bar{x})$  posee parte real igual a cero.

Si todos los eigenvalores de  $Df(\bar{x})$  poseen partes reales negativas el punto de equilibrio  $\bar{x}$  del campo vectorial no lineal asociado es *asintóticamente estable*.

Un punto de un campo vectorial es llamado *punto de silla* (saddle) si alguno(s) pero no todos, de los eigenvalores del sistema lineal asociado posee(n) partes reales mayores de cero y el resto de los eigenvalores partes reales menores de cero. Si todos los eigenvalores poseen parte real menor que cero, entonces el punto fijo hiperbólico es llamado *nodo estable ó sumidero* (sink); y si todos los eigenvalores son reales positivos, el punto es llamado *nodo inestable ó fuente* (source). Si los eigenvalores son puramente imaginarios y diferentes de cero, el punto fijo no hiperbólico se llama *centro*, en donde puede darse el caso que se presenten los llamados *ciclos límite* u *órbitas periódicas* (una órbita periódica es aquel comportamiento de una solución para la cual existe  $0 < T < \infty$  tal que

$x(t) = x(t + T)$  para toda  $t$ ), las cuales pueden ser estables ó inestables (veremos mas a detalle cada una de éstas cuando analizemos la bifurcación de Hopf en el siguiente apartado). Para saber si en nuestro caso tendremos dichas soluciones periódicas habrá que hacer uso del *criterio de Bendixson* dado a continuación:

Sea  $\dot{x} = f(x, y)$  y  $\dot{y} = g(x, y)$  dos campos vectoriales con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , y  $f$  y  $g$  al menos dos veces diferenciables, entonces, si existe una región  $D$  continua y la expresión  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  es diferente de cero y no cambia de signo, no hay existencia de órbitas cerradas (soluciones periódicas) en tal región.

Nuestro análisis en el presente trabajo tiene que ver, como ya hemos visto, con la transformación que se va dando primero, en los puntos fijos por separado, donde un nodo estable como el presentado por un punto fijo hiperbólico se va degenerando conforme los eigenvalores del Jacobiano cambian debido al cambio en los parámetros del sistema. De hecho la “función” comienza cuando aparecen los eigenvalores complejos, y el nodo degenerado estable empieza a tener comportamiento de caracter oscilatorio como se esquematiza en la Figura 2.2; y como veremos mas adelante lo mismo ocurre en el caso de un nodo inestable. Adicionalmente, analizamos los cambios ocurrentes en forma global en la respuesta dinámica del sistema, pues como veremos, al ser variados los parámetros eventualmente llegaremos a puntos donde la dinámica global cambiará de forma cualitativa; a tales puntos de cambio los denominaremos *bifurcaciones*.

Como vemos, el tipo de estabilidad que presenta un punto fijo dependerá de

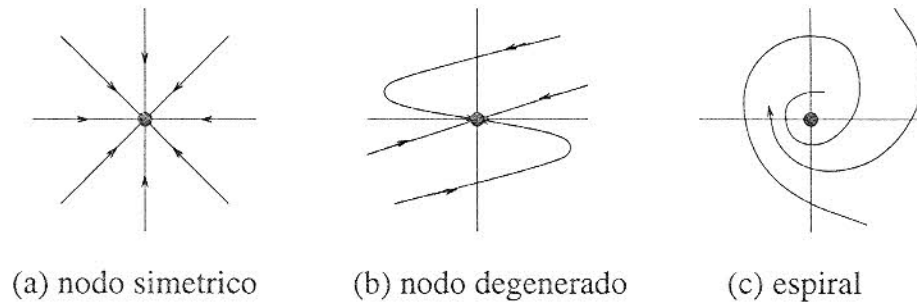


Figura 2.2: *Degeneración de un nodo estable.*

los eigenvalores del Jacobiano calculado en ese punto. No precisamente porque el sistema lineal asociado a tal sea el que dicte este comportamiento, sino que, como veremos, es debido a que las direcciones de movimiento del sistema no lineal (pseudovariedades), son tangentes en el punto fijo a los eigenvectores correspondientes, y dado que hablamos de un campo vectorial, la “fuerza” sentida en dicho punto será la misma en ambos casos, (teorema de Hartman-Grobman dado anteriormente). Claro está que, entre más nos alejemos del punto fijo, esto es cada vez menos cierto.

Retornando nuestra atención a la estructura de órbita cerca de puntos fijos para un sistema dinámico no lineal y suponiendo que  $\bar{x}$  es un punto fijo de (2.4), entonces sabemos que debemos considerar el sistema lineal asociado:

$$\dot{y} = \mathbf{A}y \tag{2.11}$$

donde  $\mathbf{A} \equiv Df(\bar{x})$  es una matriz  $n \times n$  de coeficientes constantes cuya solución

para el punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $t = 0$  está dada por:

$$y(t) = e^{\mathbf{A}t}y_0, \quad (2.12)$$

donde

$$e^{\mathbf{A}t} = I + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \quad (2.13)$$

De tal forma que ahora podemos representar a  $\mathbb{R}^n$  como la suma de 3 subespacios definidos como:

$$E^s = \text{subespacio}\{e_1, \dots, e_s\},$$

$$E^u = \text{subespacio}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}, \quad s + c + u = n$$

$$E^c = \text{subespacio}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+c+u}\}.$$

donde  $\{e_1, \dots, e_s\}$  son los eigenvectores de  $\mathbf{A}$  correspondientes a los eigenvalores que poseen parte real negativa y  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  y  $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+c+u}\}$  son los correspondientes a los eigenvectores con parte real positiva y con parte real igual a cero respectivamente. Estos son ejemplos de *subespacios invariantes* (o manifolds) como ya lo habíamos contemplado para las direcciones estable e inestable en el caso lineal; más aún, las soluciones que comienzan en  $E^s$  se aproximan a  $y = 0$  asintóticamente cuando  $t \rightarrow \infty$ , las soluciones que comienzan en  $E^u$  lo hacen cuando  $t \rightarrow -\infty$ , y las que comienzan en  $E^c$  oscilan a amplitud constante ( $\lambda = \pm i\beta$ ) ó permanecen constantes ( $\lambda = 0$ ). De aquí que nos referiremos a  $E^s, E^u$  y  $E^c$  como *variedades estable, inestable y centro* respectivamente.

Estrictamente hablando, una variedad es un conjunto con estructura Euclídeana local. En aplicaciones, las variedades son mejor conocidas como superficies  $m$ -dimensionales dentro de  $\mathbb{R}^n$ , ( $m \leq n$ , siendo  $n$  el orden del sistema). Si dicha superficie no posee singularidades (es decir, la derivada de la función que representa la superficie tiene rango máximo), entonces por el teorema de la función implícita, ésta puede ser representada localmente por medio de una gráfica.

Para los fines que se persiguen en el presente trabajo, será suficiente pensar en una de las siguientes 2 situaciones cuando nos refiramos a una variedad:

1. Un subespacio lineal vectorial en  $\mathbb{R}^n$ , para conjuntos lineales.
2. Una superficie “incrustada” en  $\mathbb{R}^n$ , la cual puede ser representada localmente por una gráfica (que se justifica por medio del teorema de la función implícita) y que es tangente al subespacio generado por los eigenvalores “comunes” (estable, inestable y/o centro) del Jacobiano calculado en el punto fijo, para el caso no lineal.

Una característica importante de una variedad, es que un punto solución con condiciones iniciales contenidas completamente en cualquiera de estas superficies, permanecerá en tal subespacio para cualquier tiempo futuro, si 2 ó más de ellas solo se intersectan en el punto fijo. Lo más rescatable de esto es, sin embargo, que dichas variedades nos marcan las tendencias que cabría esperar en un momento dado del comportamiento dinámico alrededor de un punto estacionario de interés y, como veremos más adelante en otros apartados, caracterizando los cambios que

ocurren en tales subespacios se facilita la caracterización geométrica y explicación de los diversos comportamientos dinámicos globales.

De esta forma, analizando el comportamiento dinámico de un sistema no lineal de orden 2, tendremos entonces una matriz Jacobiana de nuestro sistema linealizado de  $2 \times 2$ , cuyo polinomio característico que nos sirve para encontrar los eigenvalores (tipo de estabilidad ó inestabilidad de nuestro punto estacionario en particular) queda de la forma:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (2.14)$$

siendo la naturaleza de las soluciones dependientes de la localización de las raíces en el plano Real-Imaginario. Así, las raíces son de la forma:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad (2.15)$$

cuyo discriminante  $\Delta$  dado por:

$$\Delta = b^2 - 4c, \quad (2.16)$$

es el parámetro que determina el tipo de dinámica que presentarán los estados estacionarios. Si conectamos nuestra notación con el ejemplo lineal dado anteri-



ormente, veremos que nuestro polinomio característico sería de la forma:

$$\lambda^2 + (1 - a)\lambda - a = 0, \quad (2.17)$$

donde vemos que nuestra dinámica (descrita anteriormente), es solo dependiente del valor que tome el parámetro “a”. Como ya hemos visto, la forma de los puntos solución dependerá de las raíces del polinomio característico, que a su vez dependen del signo del discriminante,  $\Delta$ . Si  $\Delta$  es positivo, tendremos dos raíces distintas y podemos asumir la solución exponencial como:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.18)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes de integración arbitrarias dependientes de las condiciones iniciales. Si  $\Delta$  es negativo, tendremos dos raíces complejas conjugadas  $\lambda_{1,2} = R \pm Ii$ , dándonos una solución de la forma:

$$x = e^{Rt}(\text{sen}It + \text{cos}It), \quad (2.19)$$

La respuesta se vuelve inestable si cualquiera de las raíces adquiere parte real positiva. Dicha respuesta, tipificada por la naturaleza del punto de equilibrio, es resumida en la Figura 2.3, la cual muestra esquemas de los espacios-fase esperados y la Figura 2.4 su correspondiente diagrama de Argand.

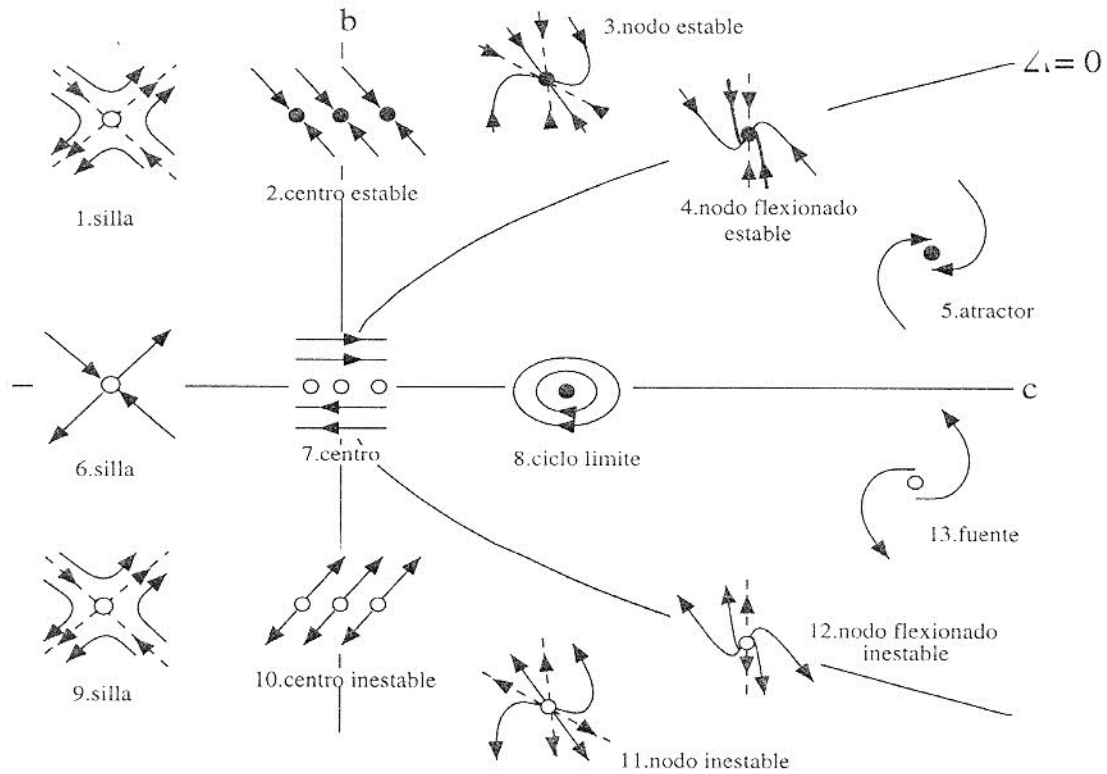


Figura 2.3: Diferentes tipos de estructuras en función de los valores de  $b$  y  $c$

En el primer cuadrante  $b > 0, c > 0$ , los exponentes son complejos con parte real negativa si  $\Delta < 0$  resultando en oscilaciones de amplitud decreciente a medida que  $b$  se incrementa. Este tipo de puntos de equilibrio es llamado *espiral estable* ó *atractor*, (fuente). A medida que nos movemos hacia la izquierda en la horizontal (ó hacia arriba de la sección de focos estables), las raíces se vuelven reales y en el caso de ser ambas negativas, estaremos hablando de nodos estables, como ya lo habíamos contemplado para el caso lineal y que corresponde a los incisos (a) y (c) de la Fig. 2.1 (inciso (c) de la Fig 2.4). De hecho el punto de cambio viene dado por la parábola  $\Delta = 0$ , donde existe la transición entre un nodo estable ó inestable, y un foco ó espiral también estable ó inestable y a este caso

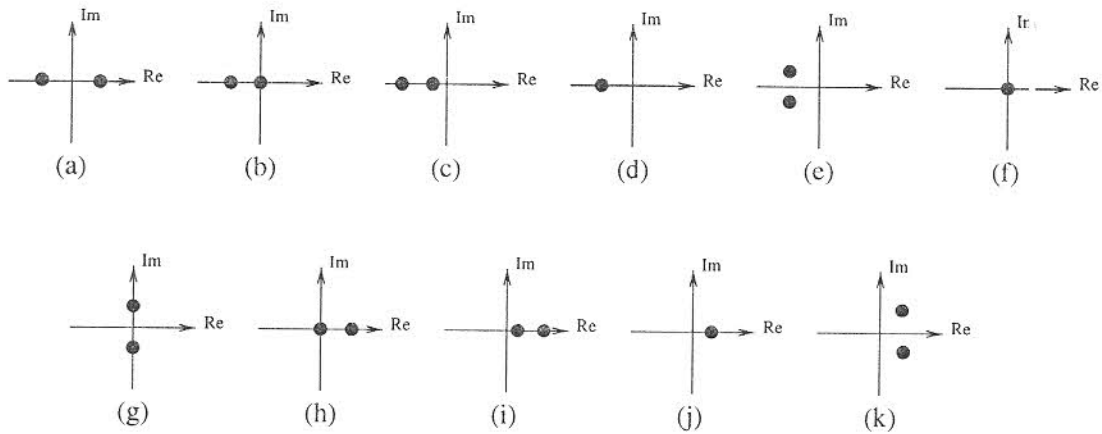


Figura 2.4: Correspondencias con la fig. anterior: (a):1,6,9; (b):2; (c):3; (d):4; (e):5; (f):7; (g):8; (h):10; (i):11; (j):12 y (k):13

especial  $\Delta = 0$ , donde las raíces son reales y coincidentes se le conoce como *nodo flexionado* (inflected node). Correspondiente al inciso (b) de nuestra Fig. 2.1 para el caso lineal (inciso (d) de la Fig. 2.4), donde las velocidades de aproximación al punto de equilibrio son iguales. A medida que nos seguimos moviendo hacia la izquierda de nuestra figura, llegamos a un punto donde un eigenvalor se hace cero y tenemos la consecuente desaparición de una variedad ó dirección de movimiento, ver también inciso (d) de la Fig. 2.1 para el caso lineal e inciso (b) de la fig. 2.4. Una vez que cruzamos este eje ( $c = 0$ ), uno de nuestros eigenvalores toma el signo contrario al otro y, por lo visto anteriormente, lo que esperaremos será tener un espacio fase correspondiente a un punto de silla tal como sucedió en el inciso (e) de la Figura 2.1 en el caso lineal (inciso (a) de la Fig. 2.4).

Este mismo razonamiento es válido si lo que hacemos es movernos desde la sección de focos inestables ( $b < 0$  y  $c > 0$ , con  $\Delta < 0$ ) hacia la sección de puntos de silla. Dos casos especiales que debemos tomar en cuenta son aquellos

puntos que caen en el eje  $b = 0$  para todo valor de  $c > 0$ , donde nuestros valores característicos serán de carácter puramente imaginario (inciso (g) de la Fig. 2.4) y como se puede apreciar en la Figura 2.3, el espacio-fase resultante será del tipo periódico. De hecho este tipo de comportamiento marca una transición entre los focos estable y los inestables. Por ello no es difícil inferir que este tipo de comportamiento es el que cabría esperar para determinado tipo de bifurcaciones, y como involucra a un solo punto de equilibrio podemos llegar a pensar que será del tipo local. Finalmente el segundo caso es cuando tenemos que nuestros valores característicos son coincidentes ( $\Delta = 0$ , incisos (d),(f) y (j)) y que además lo hacen en  $c = 0$  y  $b = 0$  (inciso (f)). Para este caso no es fácil prever el tipo de comportamiento que se tendrá, pero de lo que podemos estar seguros es de que marcará un cambio entre un tipo de comportamiento y otro que puede incluso pasar de ser local a global.

Para cuando tenemos tres dimensiones se muestra la Figura 2.5, donde tenemos para el inciso (a) dos eigenvalores negativos ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ) y uno positivo ( $\lambda_3 > 0$ ), por lo que como vemos nuestra variedad estable será de dos dimensiones y la inestable de una. Si suponemos que nuestro Jacobiano posee un par imaginario de eigenvalores ( $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$ ) tales que  $\rho < 0$  y  $\omega \neq 0$ , y uno real tal que  $\lambda_3 > 0$  esperaríamos tener un comportamiento como el mostrado en el inciso (c). Finalmente el inciso (c) se da cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  y  $\lambda_3 > 0$

Lo anterior nos da una idea de que tan importantes serán en nuestro estu-

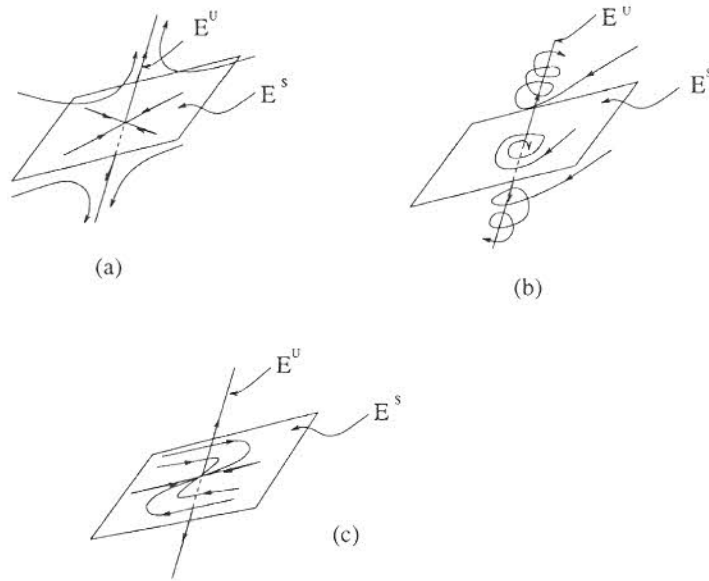


Figura 2.5: Geometría esperada para diferentes casos en  $\mathbb{R}^3$

dio los *eigenvalores* y *eigenvectores* de la matriz Jacobiana de nuestro sistema no lineal calculado en el punto estacionario. En primer lugar, caracterizando el espacio-fase generado por la respuesta del sistema dinámico no lineal en función de los eigenvalores, podemos determinar (en la mayoría de los casos) el tipo de estabilidad ó inestabilidad que el sistema mostrará en tal punto; en segundo lugar, podremos predecir hasta cierto punto el comportamiento dinámico global del sistema mediante la caracterización geométrica completa del (de los) punto(s) estacionario(s) que el sistema presente; y finalmente los eigenvectores nos darán una idea más clara sobre los tipos de variedades invariantes (estables, inestables y centros) que presentará tal dinámica.

En realidad existe toda una teoría sobre variedades invariantes en sistemas no lineales así como de su dinámica, sin embargo, sus alcances se salen del con-

texto que abarca este trabajo aún cuando nos estaremos refiriendo a ellas frecuentemente. Por el momento nos bastará conocer que existe cierta “correspondencia” con el caso lineal, y que dichas variedades nos marcan respectivamente la tendencia a *acercarse* al punto, *alejarse* del punto ó a *permanecer* en una vecindad del mismo. Puede encontrarse, sin embargo, amplia bibliografía y demostraciones rigurosas matemáticamente en las obras de Wiggins, Guckenheimer y Holmes y en la de Thompson y Stewart [36, 15, 32].

Existen sistemas para los cuales un punto de equilibrio del campo vectorial no lineal en la aproximación lineal es estable, pero no lo es en la realidad. Para este tipo de sistemas y/o para cuando la información que se tiene de la linealización es inconcluyente (cuando el punto fijo es del tipo no hiperbólico), podemos utilizar el *método de Liapunov*.

La idea básica es como sigue: Supongamos que tenemos un campo vectorial en el plano con un punto fijo  $\bar{x}$ , y queremos determinar si es estable o no (el método puede trabajar para  $n$  dimensiones y cuando  $n \rightarrow \infty$ , pero para fines meramente demostrativos, lo describiremos someramente en el plano). Estrictamente hablando, y de acuerdo a nuestras definiciones previas de estabilidad, deberá ser suficiente encontrar una vecindad  $U$  de  $\bar{x}$  para la cual, las órbitas que empiezan cerca de  $U$ , permanecen en esta vecindad durante cualquier tiempo posterior (note que en esta nueva definición de estabilidad pueden caer cualquiera de las dos dadas anteriormente). Esta condición será satisfecha si podemos mostrar

que el campo vectorial es tangente al “cuerpo” de  $U$  ó que está apuntando hacia adentro alrededor de  $\bar{x}$  como se aprecia en la Figura 2.6:

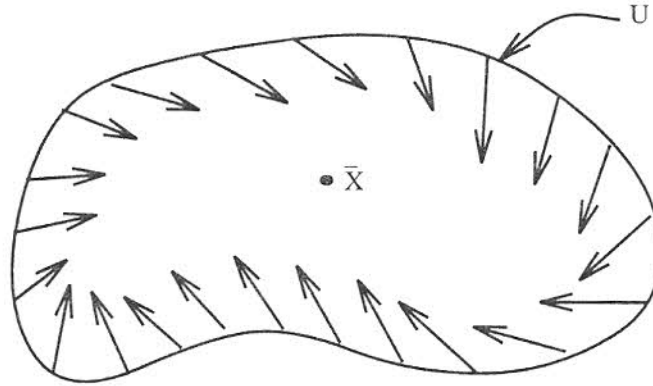


Figura 2.6: *Vecindad de Liapunov*

Esta situación debe permanecer como cierta si avanzamos de cualquier punto de  $U$  hacia  $\bar{x}$ . El método de Liapunov nos provee de un modo de hacer esto en forma precisa; tal método se muestra en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1.- Considérese el siguiente campo vectorial:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.20)$$

Si  $\bar{x}$  es un punto fijo de (2.20) y haciendo que  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  sea una función  $C^1$ , (al menos una vez diferenciable) en alguna vecindad  $U$  de  $\bar{x}$  tal que:

$$i) V(\bar{x}) = 0, \quad y \quad V(x) > 0, \quad si \quad x \neq \bar{x}.$$

$$ii) \dot{V}(\bar{x}) \leq 0; \quad U - \bar{x}.$$

Entonces  $\bar{x}$  es estable; sin embargo, si

$$iii) \dot{V}(\bar{x}) < 0; \quad U - \bar{x}.$$

entonces  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.

Nos referimos a  $V$  como una función de Liapunov. Cabe remarcar que si  $U$  puede ser escogida en cualquier rango ó en todo  $\mathbb{R}^n$ , entonces se dice que  $\bar{x}$  es asintóticamente estable en forma global si *i)* y *iii)* se mantienen. Para una demostración matemática en el plano y una generalización a  $\mathbb{R}^n$ , ver Wiggins [36].

## 2.2 Bifurcaciones Locales

Consideremos el campo vectorial parametrizado no lineal

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p \quad (2.21)$$

y supongamos que (2.21) posee un punto fijo en  $(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0)$ :

$$g(y_0, \lambda_0) = 0 \quad (2.22)$$

sabemos que primero debemos examinar el campo vectorial lineal asociado, obtenido linealizando (2.21) alrededor del punto fijo, o sea:

$$\dot{z} = D_y g(y_0, \lambda_0)z, \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (2.23)$$



para saber si se puede tratar de un punto estable ó inestable. Sin embargo, una pregunta obvia surge de inmediato si lo que perseguimos es llegar a tener cierto control sobre el sistema. ¿Como es afectada la estabilidad ó inestabilidad del punto cuando  $\lambda$  es variado?. En cierta forma esta será la pregunta que trataremos de responder a lo largo del presente trabajo.

Sabemos que si el punto fijo es hiperbólico ( $E^c = 0$ ), la estabilidad de  $(x_0, \lambda_0)$  en (2.21) está determinada por la ecuación (2.23), dada la estabilidad estructural de tales puntos en donde variando  $\lambda$  moderadamente no hay cambio en la naturaleza del comportamiento local. Dicho en otras palabras, en una vecindad de  $\lambda_0$ , un *punto fijo aislado* (por separado de otro(s) punto(s) fijo(s) que el sistema presente) de (2.21), posee un tipo de estabilidad que persiste y no cambia. Las complicaciones comienzan cuando el punto es del tipo no hiperbólico (el Jacobiano posee al menos un eigenvalor que cae en el eje imaginario ó es cero), en cuyo caso para  $\lambda$  muy cercano a  $\lambda_0$  (y para  $y$  cercano a  $y_0$ ) puede ocurrir comportamiento dinámico radicalmente nuevo. Por ejemplo, nuevos puntos fijos pueden ser creados ó destruidos ó tal vez se presenten comportamientos dependientes del tiempo (periódico, cuasiperiódico ó aún caótico).

Así diremos que si tenemos una diferencia cualitativa en el comportamiento dinámico mostrado por un punto fijo al variar  $\lambda$  ligeramente habrá ocurrido una *bifurcación local*. En la detección experimental de bifurcaciones se selecciona un valor en el parámetro de operación donde se caracteriza el comportamiento

dinámico de un sistema y se va variando paulatinamente, hasta detectar que una nueva dinámica se ha alcanzado, para después utilizar una búsqueda sistemática (tal como la del intervalo medio) para acotar tal bifurcación dentro de un margen razonable. Existen otras metodologías para la detección de bifurcaciones, Anderson y col. [citejas] han trabajado en esta dirección.

Se empieza estudiando el caso mas simple para el cual un punto fijo puede ser del tipo no hiperbólico (donde se tiene un eigenvalor de cero), dando ejemplos de las diferentes bifurcaciones que se pueden dar para después ahondar un poco más en aquellas que principalmente interesan en este estudio.

### 2.2.1 Eigenvalor cero

Supongamos que  $D_y f(x_0, \lambda_0)$  posee un simple eigenvalor de cero, con los restantes eigenvalores teniendo partes reales diferentes de cero, entonces la estructura de órbita cerca de  $(y_0, \lambda_0)$  esta determinada por la ecuación de la variedad centro asociada. Existe toda una teoría de variedades centrales, las cuales se utilizan en general para la simplificación de sistemas no lineales, al igual que el método de formas normales; sin embargo, para nuestro caso bastará con pensar en las definiciones dadas en el tema anterior acerca de lo que es una variedad. Es decir, para el sistema:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (2.24)$$

donde  $\mu = \lambda - \lambda_0$ , y además

$$f(0, 0) = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad (2.26)$$

son las condiciones para observar un punto fijo con un eigenvalor cero. Por ejemplo si tenemos el siguiente caso:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.27)$$

podemos verificar que tanto (2.25) y (2.26) se cumplen y que el conjunto de puntos fijos está dado por  $x = \sqrt{\mu}$ , lo cual representa una parábola en el plano  $\mu - x$  como se muestra en el inciso (a) de la Figura 2.7 (diagramas de bifurcación), donde las flechas en las líneas verticales representan el flujo (movimiento del punto solución en nuestro espacio paramétrico) generado por (2.27) en la dirección  $x$ . Así para  $\mu < 0$ , (2.27) no posee puntos fijos y el campo vectorial es decreciente en  $x$ ; para  $\mu > 0$ , (2.27) posee dos puntos fijos. Si hacemos un simple análisis de estabilidad veremos que uno de los puntos fijos es estable (representado por una línea sólida) y el otro es inestable (línea punteada). Este es un ejemplo de bifurcación y nos referiremos a  $(x, \mu) = (0, 0)$  como punto de bifurcación, y al valor de  $\mu = 0$  como valor de bifurcación. Cuando en un diagrama de bifurcación de un lado del parámetro no hay puntos fijos y del otro lado existen dos (como en este caso) se conoce como bifurcación *nodo-punto de silla*.

Si consideramos ahora que:

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.28)$$

donde también se cumplen (2.25) y (2.26), vemos que los puntos fijos de (2.28) están dados por:  $x = 0$ , y  $x = \mu$  (tal como se muestra en el inciso (b) de la Figura 2.7, donde para valores de  $\mu < 0$  existen dos puntos  $x = 0$  (estable) y  $x = \mu$  (inestable). Estos puntos coalescen en  $\mu = 0$ : y para  $\mu > 0$ ,  $x = 0$  es inestable y  $x = \mu$  es estable, así, ha ocurrido un intercambio de estabilidad en  $\mu = 0$  (*bifurcación transcritical*).

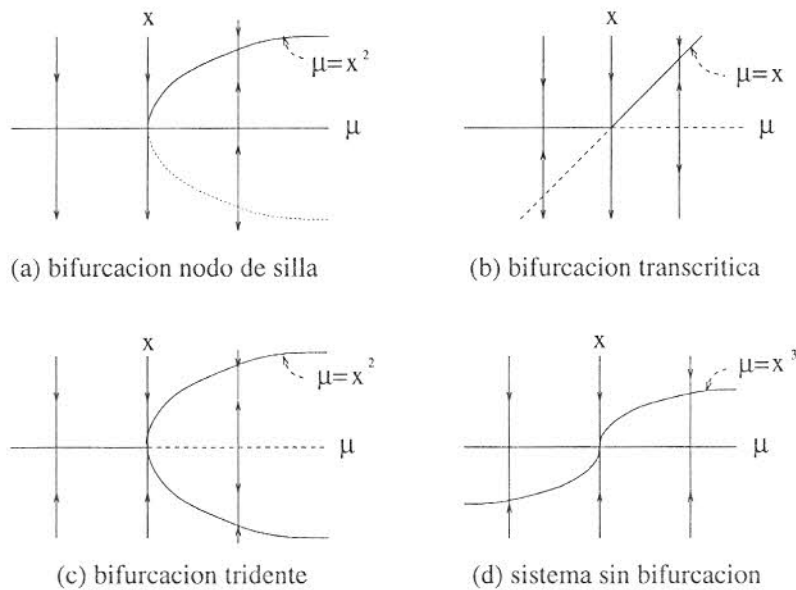


Figura 2.7: *Bifurcaciones Locales*

En el inciso (c) de la Figura 2.7 consideramos un tipo de bifurcación conocida

como *tridente*, donde el campo vectorial está dado por:

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.29)$$

y como es fácil apreciar, los puntos fijos vienen ahora dados por dos curvas, a saber  $x = 0$  y  $x = \mu^2$ ; en donde tendremos que para  $\mu < 0$ ,  $x = 0$  es estable e inestable para  $\mu < 0$ , además de que dos nuevos estados estacionarios aparecen en  $(x, \mu) = (0, 0)$  y permanecerán para cualquier  $\mu$  positiva; cuya localización está dada por la parábola correspondiente a la segunda curva.

Finalmente si ahora consideramos que:

$$\dot{x} = \mu - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.30)$$

veremos que al igual que en los tres casos anteriores se cumplen (2.25) y (2.26), sin embargo, su dinámica es cualitativamente la misma para  $\mu < 0$  y para  $\mu > 0$ , es decir, no hay creación y/o destrucción de puntos estacionarios ni tampoco existe un cambio en la estabilidad del punto en la curva, que en este caso está dada por  $\mu = x^3$ , inciso (d). Por ello no podemos referirnos a este caso como un caso de bifurcación.

Así, aunque en los 4 casos se cumplen (2.25) y (2.26), la estructura de órbita cerca de  $\mu = 0$  es diferente para cada caso, y por ello podemos concluir que el saber que se tiene un eigenvalor de cero no es suficiente para determinar la

estructura de órbita para  $\lambda$  cerca de cero; y además, la condición de tener un punto fijo no hiperbólico es una condición necesaria pero no suficiente para tener una bifurcación. Los incisos (a),(b) y (c) de la Fig. 2.7 claramente son ejemplos de una bifurcación según nuestra definición dada anteriormente, no así el inciso (d) aún cuando como ya vimos, se cumple con las dos condiciones matemáticas necesarias pero no suficientes para caracterizar este tipo de bifurcaciones. En realidad cada caso de bifurcación puede tener muy diferentes condiciones, las cuales pueden involucrar no solamente los eigenvalores del Jacobiano, sino también la dimensión del sistema tanto de variables como de parámetros.

Las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) son conocidas como las *formas normales* de las bifurcaciones nodo-punto de silla, transcítica y tridente respectivamente, y en general nos sirven para simplificar aquellas condiciones que se presentan cuando estos tipos de bifurcaciones locales tienen lugar. Analizaremos ahora las restantes condiciones matemáticas que se presentan para poder caracterizar cada tipo de bifurcación, poniendo especial atención en la bifurcación tipo tridente, por ser la primera que encontraremos en el estudio del sistema que ocupa este trabajo.

La geometría de las curvas cuyos puntos fijos están asociados con la bifurcación tridente tiene las siguientes características:

(a).-2.25 y 2.26 se mantienen. (Condiciones de punto fijo y eigenvalor cero respectivamente).

(b).-Existen dos curvas que pasan por  $(\mu, x) = (0, 0)$ , una dada por  $x = 0$  y la otra por  $\mu = x^2$ .

(c).-La curva  $x = 0$  existe en ambos lados de  $\mu = 0$ ; la curva  $\mu = x^2$  solo en uno.

(d).-Los puntos fijos de  $x = 0$  poseen diferentes tipos de estabilidad a los lados de  $\mu = 0$ . Los puntos de  $\mu = x^2$  poseen el mismo tipo de estabilidad a ambos lados de  $x = 0$ .

Para tener más de una curva de puntos fijos pasando por  $(\mu, x) = (0, 0)$  debemos tener:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0 \quad (2.31)$$

Además requerimos que  $x = 0$  sea una curva de puntos fijos de (2.24), entonces asumiendo que puede ser representada como:

$$\dot{x} = xF(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (2.32)$$

donde:

$$F(x, \mu) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x, \mu)}{x} & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) & x = 0 \end{array} \right\}$$

es la segunda curva que pasa por  $(x, \mu) = (0, 0)$ , y entonces:

$$F(0, 0) = 0 \quad (2.33)$$

además

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad (2.34)$$

nos asegura que solamente una curva adicional de puntos fijos pasa por  $(x, \mu) = (0, 0)$ . Asimismo haciendo uso del teorema de la función implícita, tenemos que para  $x$  suficientemente pequeña, existe una única función  $\mu(x)$  tal que:

$$F(x, \mu(x)) = 0 \quad (2.35)$$

Para que la curva de puntos fijos  $\mu(x)$  satisfaga las condiciones mencionadas será suficiente que se cumpla:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0 \quad (2.36)$$

y

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0 \quad (2.37)$$

Dichas condiciones pueden ser obtenidas en términos de las derivadas de  $F$  evaluadas en el punto de bifurcación via diferenciación implícita de (2.35), lo que nos da:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0)} = 0 \quad (2.38)$$

y

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0)} \neq 0 \quad (2.39)$$



utilizando (2.38) y (2.39) junto con nuestra definición de  $F(x, \mu)$  dada, podemos expresar estas condiciones en términos de  $f$ :

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} = 0 \quad (2.40)$$

y

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} \neq 0 \quad (2.41)$$

De tal suerte que, para verificar que (2.24) posee una bifurcación tipo tridente en  $(x, \mu) = (0, 0)$  es suficiente que (2.25), (2.26) (condiciones de punto fijo no hiperbólico), (2.31), así como que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0 \quad (2.44)$$

se cumplan.

Existen dos posibilidades en cuanto a la disposición geométrica de las dos ramas de puntos fijos que intersectan en el punto de bifurcación en este tipo de bifurcación (curva  $\mu = x^2$ ), las cuales dependen del signo de (2.41). La estabilidad que presente cada curva es encontrada evaluando la función para cada punto en particular y tomando en cuenta su signo.

Finalmente, concluimos nuestra discusión sobre este tipo de bifurcación notando que nuestras condiciones (2.25, 2.26, 2.31, 2.42, 2.43 y 2.44) implican que la estructura de órbita cercana a  $(x, \mu) = (0, 0)$  es cualitativamente la misma al mismo punto del campo vectorial:

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.45)$$

que es la *forma normal de la bifurcación tridente*.

## 2.2.2 Bifurcación de Hopf

El caso que sigue en complejidad de los previamente estudiados hasta ahora (tanto para sistemas no lineales como para el caso del sistema de estudio que ocupa el presente trabajo), es aquel en el cual la matriz asociada con el campo vectorial linealizado alrededor del punto fijo posee un par de eigenvalores púramente imaginarios con los restantes eigenvalores teniendo partes reales diferentes de cero.

Para éste tipo de bifurcación conocida como bifurcación de Hopf (en algunos textos se menciona como bifurcación de Poincaré-Hopf-Andronov por cuestiones históricas), al igual que en los casos dados anteriormente hacemos uso tanto de la teoría de las formas normales como del teorema de la variedad central para su estudio y caracterización. Como recordaremos por el teorema de la variedad central la estructura de órbita cerca del punto fijo está determinada por el campo vectorial restringido a la variedad central, es decir, aquel campo  $m$ -dimensional

descrito por los eigenvalores que pasan al plano imaginario ( $m=2$  para el caso más simple). Esta restricción nos dará una familia de  $p$ -parámetros de campos vectoriales de variedades centrales de dos dimensiones.

Así, aplicando tanto la teoría de las formas normales como el teorema de la variedad central es posible llegar a la forma simplificada siguiente:

$$\dot{r} = d\mu r + ar^3 \quad (2.46)$$

$$\dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2 \quad (2.47)$$

donde  $\mu$  es el vector de parámetros del sistema, y  $a, b, c, d$  y  $\omega$  son constantes dependientes de los parámetros y constantes originales del sistema. Como es posible apreciar, se ha transformado el problema original a coordenadas polares, dado que, como veremos más adelante, por la naturaleza de las soluciones después del punto de bifurcación ésto es lo más conveniente para describir la geometría de tales dinámicas.

En realidad existe todo un procedimiento matemático para llegar a esta simplificación, la cual comienza con la transformación del punto fijo al origen y después, si es necesario, se continúa con una transformación lineal de coordenadas, la que nos ayudará a poner el campo vectorial en una forma apropiada. De esta forma se emplean la teoría de las formas normales y el teorema de la variedad central para así poner las ecuaciones resultantes en coordenadas polares. Donde, debido a que nos interesa solo la dinámica lo suficientemente “cercana” al punto de equilibrio

se utiliza una expansión en series de Taylor. Finalmente y haciendo suposiciones simplificaciones (justificadas por medio del conocimiento del error que pueden provocar) se ignoran términos de órdenes superiores, y se caracteriza la dinámica exhibida por la forma normal “truncada”, que permanece prácticamente igual a aquella en que no se hacen tales cambios (al menos en cierta vecindad del punto fijo).

Puede encontrarse un estudio bastante detallado de lo anterior en la obra de Wiggins [36], donde también se detallan las condiciones estrictamente matemáticas que se presentarán para que las dinámicas que el sistema exhibirá después del punto de bifurcación sean estables ó inestables. En realidad la principal razón por la que se hizo la transformación a coordenadas polares, es que la geometría de las soluciones, una vez ocurrida la bifurcación, es del tipo periódico, lo cual nos dará por resultado los llamados *ciclos límite*. Tal tipo de solución presentará en general las siguientes características:

1) Para que se presenten es necesario que se tengan valores de  $r > 0$  y valores de  $\mu$  para los cuales  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{\theta} \neq 0$ .

2) Dado que debemos tener  $r > 0$  y valores de  $\mu \neq 0$ , la única órbita periódica posible tiene una amplitud cuyo orden es de  $\sqrt{\mu}$ .

3) La órbita periódica es asintóticamente estable para valores de  $a < 0$  e inestable para  $a > 0$ .

4) El origen es un punto fijo estable en  $\mu = 0$  si  $a < 0$  e inestable si  $a > 0$

Existen 4 casos en los que esta bifurcación se lleva a cabo, en dos de ellos las órbitas periódicas serán del tipo estable (*bifurcación supercrítica*) y en las otras del tipo inestable (*bifurcación subcrítica*). Asimismo se darán dos casos en los cuales las soluciones periódicas resultantes de la bifurcación existen para valores tales que  $\mu > 0$  y dos casos en los que existen para valores de  $\mu < 0$ , alternados cada uno con los dos casos anteriores. El tipo específico de bifurcación que se presente será función de los valores de los parámetros  $a$  y  $d$  en (2.46 y 2.47) según se muestra en la Fig. 2.8:

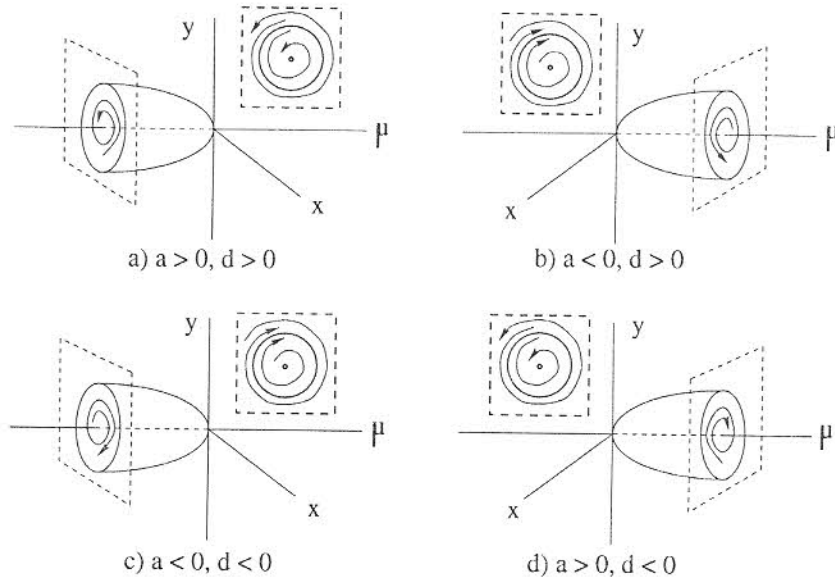


Figura 2.8: *Diferentes tipos que presenta la bifurcación de Hopf.*

En el primer inciso de la Fig. 2.8 tendremos que el origen es un punto fijo inestable para  $\mu > 0$  y asintóticamente estable para  $\mu < 0$ , con una órbita periódica inestable para  $\mu < 0$ . Para el caso cuando  $d > 0$  y  $a < 0$ , el origen es un punto fijo asintóticamente estable para  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$  con

una órbita periódica asintóticamente estable para  $\mu > 0$ . En el caso en que el punto fijo sea asintóticamente estable para  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$  con ciclos límite asintóticamente estables para  $\mu < 0$ , inciso (c). Finalmente, cuando nuestros valores sean del tipo  $d < 0$  y  $a > 0$  en (2.47) tendremos que el origen es un punto fijo asintóticamente estable para valores de  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$  con órbitas periódicas asintóticamente estables para  $\mu < 0$ .

Haciendo un análisis más detallado de la matemática involucrada de lo anterior podemos remarcar dos cosas:

a) El parámetro “ $a$ ” nos dice cuando la órbita periódica bifurcada es estable ( $a < 0$ ) o inestable ( $a > 0$ ), y por tanto cuando una bifurcación será supercrítica o subcrítica respectivamente.

b) Para  $d > 0$  los eigenvalores complejos cruzan el plano imaginario de izquierda a derecha a medida que  $\mu$  crece, y si  $d < 0$  lo hacen de derecha a izquierda, por lo tanto, en el primer caso el origen será asintóticamente estable para  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$ . De la misma manera, para  $d < 0$  el origen es inestable para  $\mu < 0$  y asintóticamente estable para  $\mu > 0$ .

En la obra de Wiggins [36] puede encontrarse una discusión más detallada.

## 2.3 Bifurcaciones Globales

A los cambios profundos en el comportamiento cualitativo causado por la variación de los parámetros y que están asociados no solo con las bifurcaciones locales, sino

también con cambios en la configuración topológica global del sistema, los cuales pueden involucrar a las variedades estables, inestables y centro de los puntos fijos y ciclos límite, se les conoce como *bifurcaciones globales*. Tal tipo de bifurcación ocurre cuando por lo general, un parámetro de control pasa un valor crítico (el cual solo puede ser determinado en forma numérica), y que es identificado, por ejemplo, cuando una variedad inestable cae dentro de una estable y un nuevo comportamiento en forma global es alcanzado.

Existen diferentes tipos de bifurcaciones globales, dependiendo de la configuración topológica de las variedades involucradas. En general cualquier cambio topológico en la configuración de las variedades puede causar algún tipo de cambio cualitativo en el comportamiento del sistema. En algunos casos como en la conocida *conexión homoclínica* en el sistema de Lorenz, el cambio afecta en forma dramática la estructura del espacio-fase sin haber cambios en los atractores. Otras bifurcaciones globales crean o destruyen atractores, como sucede en la conexión heteroclínica en el mismo sistema. Dicha transición abrupta al caos puede involucrar *histéresis*, donde una nueva topología en el arreglo del espacio-fase es alcanzada.

De acuerdo con Thompson y Stewart [32], existen dos modos por los cuales puede ocurrir una bifurcación global, una es aquella en la que hay un cambio cualitativo en la topología de la variedad invariante. La segunda es del tipo híbrido, donde el evento de bifurcación es una bifurcación local de la variedad

catastrófica cuyas repercusiones están determinadas por la estructura global de las variedades. Este tipo de bifurcación involucra los fenómenos de histéresis y catástrofe de cielo azul, donde se da la desaparición de un ciclo límite. Este evento no está asociado a una bifurcación local, sin embargo, tiene en común con las bifurcaciones locales catastróficas que el atractor desaparece por una colisión con un punto fijo. De hecho, la catástrofe de cielo azul es un tipo de bifurcación global que involucra la desaparición continua de un ciclo límite a través de una colisión entre la variedad del ciclo límite con un punto de equilibrio del tipo nodo-punto de silla. En la obra de Thompson y Stewart [32], puede encontrarse una descripción más amplia de estos tipos de bifurcación así como esquemas en dos dimensiones. Para un diagrama en tres dimensiones referirse a Guckenheimer y Holmes [15].

## **2.4 Control Retroalimentado con uso de Filtros de Lavado**

Existen varios trabajos encaminados a la creación de leyes en el control de bifurcaciones (Brockett [3], Lee y Abed [21], Wang y Abed [35]), de ellos rescatamos la idea de un tipo de control que aparte de ser robusto ante incertidumbres en el modelamiento de un sistema, preserve la localización de todos los equilibrios que el mismo presenta. El procedimiento de diseño está encaminado a asegurar



la estabilidad asintótica de las bifurcaciones de Hopf. Como Wang y Abed [35] lo muestran, la estabilidad orbital asintótica de las soluciones periódicas resultantes de dichas bifurcaciones puede ser estabilizada mediante ganancias no lineales en el modelamiento del control, para un rango de valores del parámetro. Estas ideas tienen su fundamento en procedimientos matemáticos donde se busca encontrar las condiciones bajo las cuales los eigenvalores del sistema pasan al plano imaginario y de como “retardar” esto.

El control retroalimentado de sistemas dinámicos no lineales es típicamente de la forma  $u = u(x - x_0)$ , donde  $x$  es el vector de estado del sistema y  $x_0$  es un equilibrio inestable de interés. Cabe notar que la función de control  $u$  no necesariamente es de comportamiento suave, y que  $x_0$  puede también ser una órbita periódica [23]. Bajo un modelo incierto, un controlador de retroalimentación no lineal de estado estático diseñado bajo un equilibrio dado influirá no solo en la estabilidad, sino también en la localización de éste y otros equilibrios del sistema. Para prevenir esta dificultad, se emplea una forma de retroalimentación dinámica que preserva exactamente todos los equilibrios del sistema. Esto se logra mediante el uso de los llamados *filtros de lavado* (Lee y Abed, [21]). Junto a esta preservación de la localización del equilibrio del sistema, la incorporación de filtros de lavado en el control retroalimentado facilita el diseño de un control que no depende del parámetro de bifurcación. Esto es importante para conseguir un control que sea efectivo sobre un rango de parámetros en lugar de un valor

específico.

La introducción de filtros de lavado en funciones de control se lleva a cabo de tal forma que para cada variable de estado del sistema  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), puede ser introducido un filtro de lavado gobernado por la ecuación dinámica:

$$\dot{z}_i = x_i - d_i z_i \quad (2.48)$$

junto con la ecuación de salida:

$$y_i = x_i - d_i z_i \quad (2.49)$$

donde los  $d_i$  son los parámetros que implican el uso de filtros de lavado. En esta formulación se pueden presentar  $n$  filtros de lavado, uno por cada variable de estado del sistema; sin embargo, el número de filtros necesarios (y por lo tanto el incremento en el orden del sistema), es usualmente menor de  $n$ .

Las ventajas de usar filtros de lavado de este modo parten de las propiedades resultantes de la preservación del (de los) equilibrio(s) que le siguen. Es decir, si  $u = u(y)$ , tal como  $u = k_l y$ , siendo  $u$  la función de control,  $k_l$  la ganancia de retroalimentación y  $y$  la salida del filtro de lavado con  $u(0) = 0$ , esta desaparece en el estado estable. De aquí que los componentes  $x$  de un equilibrio de lazo cerrado son idénticos a los correspondientes del equilibrio de lazo abierto. La función de control  $u = u(y)$  está garantizada a centrarse en el punto correcto de operación

y más aún, en el punto de bifurcación de Hopf, el sistema extendido (con la incorporación de dicha ley de control) posee el mismo coeficiente de estabilidad que el sistema original [21, 35].

Concretamente, la idea trata de la incorporación de uno a  $n - 1$  filtros de lavado (donde  $n$  es el orden del sistema original en cuestión). Dichos filtros poseen parámetros ( $d_i$ ) que se utilizan junto con la ganancia de retroalimentación (en este caso lineal),  $k_l$  en el ajuste del comportamiento de la respuesta de salida de las soluciones mostradas por el sistema. Las ventajas del uso de los filtros de lavado ya fueron mencionadas y principalmente se centran en dos puntos; la preservación en la localización de los equilibrios que el sistema presenta y, la obtención de un control robusto ante incertidumbres en el modelamiento del sistema.

## 2.5 Software

Como ya vimos un sistema dinámico está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que determinan como las trayectorias se mueven en un espacio multidimensional con respecto al tiempo. Tales sistemas pueden ser discretos o continuos. Como ya hemos visto, el principal objetivo de la teoría de los sistemas dinámicos es proveer una descripción comprensible de las estructuras geométricas que son consecuencia de tales trayectorias. Además, para la clara comprensión de las dinámicas asociadas con un sistema dinámico en particular, la teoría de bifurcaciones puede ser utilizada para describir como dichas dinámicas

cambian cuando los parámetros del sistema son variados.

La exploración interactiva numérica y gráfica son importantes herramientas en la investigación de sistemas dinámicos por varias razones:

1. Generalmente no es posible obtener información de trayectorias que no sea mediante integración numérica o iterativa.

2. Las estructuras geométricas de un sistema dinámico son frecuentemente intrincadas y extremadamente sensibles a cambios en los parámetros del sistema; y la computación interactiva y gráfica resulta ser una valiosa herramienta en la interpretación de su significado.

3. La exploración de un sistema dinámico frecuentemente involucra la generación de grandes cantidades de datos, y usualmente solo una pequeña porción de tales debe ser almacenada. De aquí que sea importante encontrar representaciones compactas y eficientes de la dinámica de los sistemas que puedan ser fácilmente recuperadas.

Dado lo anterior, se hizo uso de dos paquetes de integración numérica con características propias para el desarrollo del presente trabajo. El primero de ellos denominado **Dstool** [16], es un paquete - herramienta eficiente en la investigación de sistemas dinámicos, el cual integra una interfase gráfica amigable al usuario, capacidades en el manejo de datos obtenidos y un conjunto de algoritmos numéricos junto a la flexibilidad de adición de más algoritmos y programas propios, así como la ventaja de poder comunicar los datos obtenidos (que pueden ser ou-

rificados) con otros programas. El programa está escrito en lenguaje C y ha sido implementado para utilizarse con ambiente Open-Windows. **Dstool** fue desarrollado en el MIT y está basado en el programa *kaos* escrito por S. Kim y J. Guckenheimer [16]. Este paquete fue utilizado para la caracterización geométrica de las diferentes estructuras y espacios-fase generados por la respuesta dinámica del sistema de estudio.

El segundo paquete utilizado es el conocido como **AUTO**. Este es un programa capaz de hacer detecciones de cierto tipo de bifurcaciones en el tipo de modelo matemático como el utilizado, así como un seguimiento del tipo de comportamiento que resulta como consecuencia a tales bifurcaciones. AUTO es capaz de trabajar con diferentes tipos de sistemas continuos y discretos: desde sistemas algebraicos hasta sistemas de ecuaciones diferenciales. Concretamente, en este estudio fue utilizado para la detección de las bifurcaciones tipo tridente y de Hopf que nuestro sistema presenta. Asimismo hace el seguimiento de las ramas estable e inestable una vez ocurrida la bifurcación tipo tridente y aún más, calcula las soluciones periódicas estables e inestables resultantes de tal bifurcación de Hopf. Con este paquete se hicieron los diagramas de bifurcación de uno y dos parámetros que son el resultado del presente trabajo. La caracterización de las diferentes zonas en los diagramas así obtenidos fue hecha mediante **Dstool**. AUTO es un paquete escrito en lenguaje FORTRAN y fue desarrollado por E. J. Doedel [10, 11].

## Capítulo 3

### Sistema de Estudio

El modelo analítico utilizado en el estudio presente representa un lazo de convección térmica. Tal lazo es un caso especial del sistema de tercer orden que describe la convección entre dos placas estudiado por Lorenz. El modelo matemático del sistema es:

$$\dot{x}_1 = -px_1 + px_2 \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1x_3 - x_2 \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3 - R \quad (3.3)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}$ , y tanto  $p$  como  $R$  son parámetros del sistema. El experimento involucra convección térmica en un lazo toroidal vertical calentado en su parte inferior y enfriado en su parte superior, como se esquematiza en la Figura 3.1.

Las variables  $x_1, x_2, x_3$  corresponden a la velocidad promedio a través de las

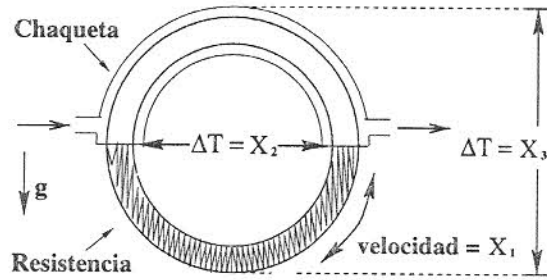


Figura 3.1: *Aparato experimental; toroide de convección térmica.*

secciones en el lazo, la diferencia de temperaturas en la dirección horizontal, y vertical respectivamente. El parámetro  $R$  es el *número de Rayleigh* que es proporcional a la velocidad neta de calentamiento; y  $p$  denota el *número de Prandtl* que es función de las propiedades físicas del líquido contenido en el toroide. Experimentalmente se observa que conforme la velocidad de calentamiento se incrementa, el flujo del fluido en el lazo pasa por transiciones. Para una velocidad baja de calentamiento el fluido se encuentra en estado de reposo. Conforme esta velocidad se incrementa un estado de convección estable aparece (en sentido y contrasentido de las manecillas del reloj). Al continuar incrementando la velocidad de calentamiento ( $R$  aumenta) se presentan oscilaciones temporales y eventualmente movimiento caótico del fluido.

Aunque las transiciones discutidas están bien reflejadas por el modelo dado por las ecuaciones (3.1, 3.2, 3.3) según fue mostrado por Wang y Abed [35], es conveniente aclarar que el modelo presenta cierta inexactitud, debida a ciertas suposiciones que han simplificado el modelamiento. Tales suposiciones son, entre otras, el de suponer que tanto el parámetro  $p$  como  $R$  son constantes conforme

se desarrolla el experimento. Por ello estaremos hablando de un modelaje un tanto incierto del sistema. También dado que el parámetro  $p$  tiene que ver con las propiedades del fluido y este se considera constante siempre en este trabajo, se toma el valor de  $p = 4$ , lo cual no quita generalidad en la investigación; y se trata a  $R$  como parámetro de bifurcación. Asimismo es conveniente recalcar que el modelo posee simetría, en la cual reemplazando  $(x_1, x_2, x_3)$  por  $(-x_1, -x_2, x_3)$  resulta en el mismo conjunto de ecuaciones, como se podrá apreciar a continuación en el diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación de lazo abierto del modelo se muestra en la Fig. 3.2, en él la línea sólida representa un equilibrio estable, una línea punteada representa uno inestable y los círculos son órbitas periódicas. Este diagrama fue obtenido utilizando el paquete AUTO [10, 11].

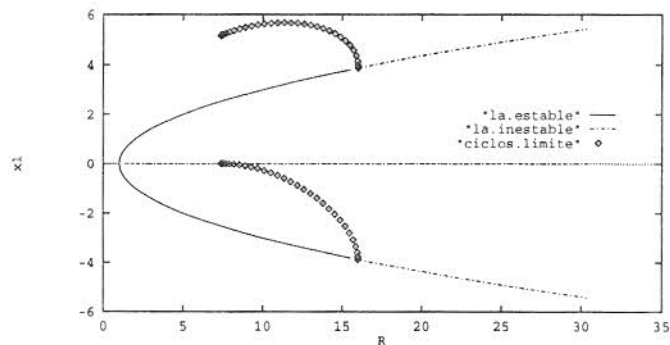


Figura 3.2: *Diagrama de bifurcación del lazo abierto.*

Para  $R \leq 1$  el sistema (3.1, 3.2, 3.3), posee un punto de equilibrio simple globalmente atrayente. Este equilibrio dado por  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -R$ , corresponde a un estado de no movimiento. En  $R = 1$  este equilibrio pierde su estabilidad,



dado que dos puntos de equilibrio adicionales aparecen por medio de una bifurcación de tipo tridente. Estos equilibrios que están presentes para toda  $R > 1$  están dados por  $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{R-1}; x_3 = -1$ . Tales puntos de equilibrio representan los estados de convección en las direcciones del sentido y contrasentido de las manecillas del reloj. Este equilibrio convectivo pierde su estabilidad en bifurcaciones de Hopf que ocurren a valores tales que  $R = p(p+4)/(p-2)$ . Para nuestro caso, dado que fijamos el valor de  $p = 4$ , tendremos  $R = 16$ . Como se muestra en la figura, las bifurcaciones de Hopf resultan en soluciones periódicas inestables, las cuales son subcríticas. Asimismo, la figura muestra la desaparición de las órbitas periódicas inestables en una catástrofe de cielo azul a un valor aproximado de  $R = 7.3198$ .

También, sabemos por estudios de Wang y Abed [35], que el sistema posee comportamiento errático para valores grandes de  $R$ ; este comportamiento puede ser del tipo caótico. Lo que se observan son trayectorias que parecen caóticas por un largo intervalo de tiempo, después del cual se asientan en un equilibrio. Este tipo de comportamiento frecuentemente es referido como *caos transiente*. Tal comportamiento es observado en simulaciones de (3.1, 3.2, 3.3), para valores de  $7.3198 < R < 15.9$ , para algunas condiciones iniciales. La simulación muestra que las condiciones iniciales que resultan en caos transiente, son más comunes para grandes valores de  $R$  en éste intervalo. En la Fig.3.3 inciso (a) se muestra una trayectoria típica de un caos transiente en su espacio-fase.

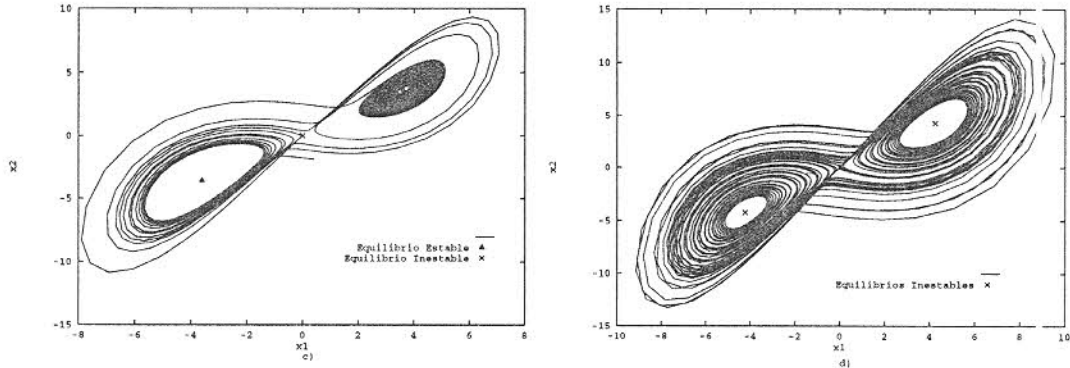


Figura 3.3: *Espacios-fase de (a) Transiente caótico, y (b) Atractor caótico.*

A aproximadamente  $R = 15.9$  el caos transiente se convierte en un atractor caótico por medio de una crisis. Así, en el rango  $15.9 < R < 16$  existen 3 posibles atractores, uno de cada rama bifurcada que apareció en la bifurcación tridente y un atractor caótico. Para  $R > 16$  las trayectorias que muestra el sistema son de tipo caótico. Un espacio-fase típico de este comportamiento se muestra en el inciso (b) de la Fig.3.3. La Figura 3.4 muestra las curvas integrales respectivas de los comportamientos esquematizados en la figura anterior. Existen varios escenarios por los cuales bifurcaciones sucesivas pueden resultar en un conjunto caótico invariante; éstos son discutidos extensamente en la literatura (Thomson y Stewart, [32]; Wiggins, [36]). Sin embargo, lo más importante de estos escenarios, desde una perspectiva de control, es que al parecer el caos depende en varios aspectos de la sucesión de bifurcaciones. De aquí que sea importante el control que se puede llegar a tener en las bifurcaciones primarias o locales. Supongamos que un control en particular reduce significativamente la amplitud de una solución bifurcada, o que se mejora significativamente su estabilidad sobre un rango de parámetro no

trivial, podemos entonces esperar que la ocurrencia de una bifurcación pueda ser “retrasada”.

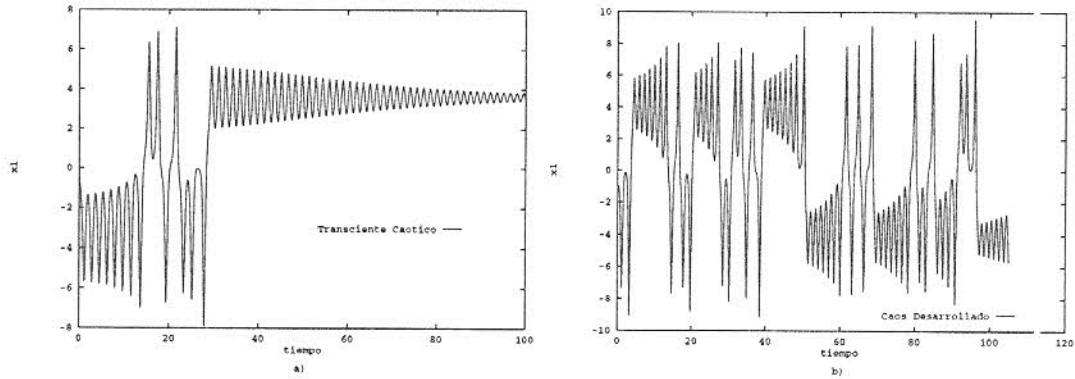


Figura 3.4: *Curvas integrales de (a) Transiente caótico, y (b) Atractor caótico.*

El procedimiento para el diseño de un controlador o de una familia de controladores con las características mencionadas, fue descrito por Wang y Abed [35], como ya fue presentado en el capítulo anterior.

El modelo analítico utilizado, que incluye la implementación del filtro de lavado sobre la medición de la variable  $x_3$  (“lazo cerrado”), esta dado por:

$$\dot{x}_1 = -px_1 + px_2 \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1x_3 - x_2 \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3 - R + u \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 - dx_4 \quad (3.7)$$

donde  $x_4$  es la variable es la variable del filtro, y la variable manipulada o control

$u$  (que físicamente representa la manipulación de la velocidad de calentamiento en función del comportamiento del fluido dentro del toroide), tiene la forma:

$$u = -k_l y \quad (3.8)$$

$$y = x_3 - dx_4 \quad (3.9)$$

La ganancia de retroalimentación lineal es  $k_l$ ,  $d$  es el parámetro del filtro de lavado. Analizando el sistema “aumentado” que se tiene después de la incorporación del filtro de lavado, notamos que el jacobiano de la matriz resulta que depende ya no solo de los valores de los parámetros del sistema original, sino también de los parámetros que fueron introducidos en el controlador y filtro de lavado ( $k_l$  y  $d$ , respectivamente). Dado ello, podemos esperar llegar a tener cierto control en el comportamiento de las respuestas de lazo cerrado del sistema, mediante la conveniente manipulación de tales parámetros. Asimismo vemos que nuestra salida del controlador ( $y$ ), desaparece en el estado estable, y de aquí que los componentes  $x$ 's de un equilibrio de lazo cerrado son idénticos a los componentes correspondientes del lazo abierto. También, según fue mostrado por Lee [21], la función de control  $u = u(y)$  está garantizada a centrarse en el punto correcto de operación y que el punto de bifurcación de Hopf en el sistema extendido (3.4, 3.5, 3.6, 3.7) tiene el mismo coeficiente de estabilidad que el sistema original.

La relación entre el valor crítico del parámetro  $R$  y la ganancia del control

$k_l$  puede determinarse encontrando las condiciones bajo las cuales el jacobiano del sistema global (3.4, 3.5, 3.6, 3.7), posee un par de eigenvalores puramente imaginarios. Wang y Abed encontraron que estas condiciones se trasladan a la relación:

$$(Rd - 2p + 2Rp + dp)^2 + (2 + d + k_l + p)^2(2Rdp - 2dp) - (2 + d + k_l + p)(Rd - 2p + 2Rp + dp)(R + 2d + k_l + p + dp + k_l p) = 0 \quad (3.10)$$

$$k_l + p + d + 2 > 0 \quad (3.11)$$

$$R > 1 \quad (3.12)$$

Y que para el caso donde  $p = 4$  y  $d = 0.5$ , estas condiciones son equivalentes a la restricción sobre la ganancia del controlador  $k_l$ :

$$-1.5 < k_l < 2 \quad (3.13)$$

Además, para retrasar la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf se debe restringir a que  $k_l$  sea positivo. Valores negativos de  $k_l$  resultará en mover estas bifurcaciones a valores mas pequeños de  $R$ . Así, la Fig.3.5 muestra los diagramas de bifurcación obtenidos para el sistema de lazo cerrado, donde las bifurcaciones de Hopf fueron adelantadas a un valor de  $R = 25$  en el caso del inciso (a) de la figura, y retrasadas a un valor menor de 4 en el segundo inciso. Los valores de

la ganancia lineal fueron de  $k_l = 0.3$  y  $k_l = -0.75$  respectivamente. Para ambos casos se usó el valor de  $d = 0.5$  para el parámetro del filtro de lavado.

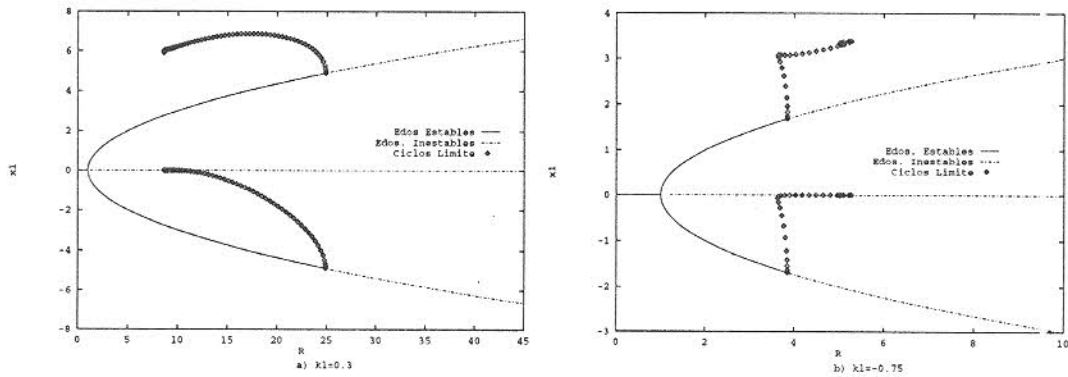


Figura 3.5: Respuesta del lazo cerrado, (a)adelanto, y (b)retraso de las bifurcaciones de Hopf.

Resumiendo, las ventajas en la utilización de filtros de lavado se centran en dos puntos principalmente, primero la preservación en la localización de los equilibrios que el sistema presenta, y segundo la obtención de un control robusto ante incertidumbres en el modelamiento del sistema. Se utiliza un control retroalimentado dinámico con las características antes mencionadas en el cual, mediante el ajuste de la ganancia de control lineal se intenta retardar la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf, en relación al valor de  $R = 16$  para el lazo abierto. Como ya vimos, en la práctica puede desearse que este valor sea mayor o menor.

# Capítulo 4

## Resultados

Como ya hemos visto en el capítulo anterior y como fue mostrado por Wang y Abed [35], el control retroalimentado dinámico representado por las ecuaciones (3.4, 3.5, 3.6, 3.7) puede modificar, mediante el ajuste de la ganancia de control lineal  $k_l$ , la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf en relación al valor de  $R = 16$  para el lazo abierto. Asimismo hemos visto que podemos retardar o adelantar dicha ocurrencia de acuerdo al siguiente criterio:

$k_l > 0 \Rightarrow$  Adelanto en la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf.

$k_l < 0 \Rightarrow$  Retardo en la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf.

Y los resultados pueden ser apreciados en la Fig. 3.5 del capítulo anterior. De esta discusión resulta claro que la retroalimentación lineal puede estabilizar el equilibrio convectivo para rangos arbitrarios del parámetro. Sin embargo, hay que recordar que las bifurcaciones que aparecen son del tipo subcrítico para el sistema

de lazo abierto, y que esta subcriticabilidad de las bifurcaciones de Hopf es crucial tanto para la aparición del caos como del caos transiente en el modelamiento para varios valores de  $R$ .

Así, varias preguntas surgen y una de ellas es, donde el controlador re-orientado descrito en el capítulo anterior presenta la transición del tipo de bifurcación *supercrítica* - *subcrítica* en relación al parámetro  $R$  y a la ganancia del control lineal  $k_l$ . Y como serán las geometrías características de las dinámicas obtenidas. Es interesante saber también como se comportaran los eigenvalores del sistema controlado conforme nos movemos respecto a los parámetros anteriores, a fin de poder llegar a predecir la dinámica cualitativa del sistema.

## 4.1 Análisis de Diagramas de Dos Parámetros

Dado que es claro (por una simple inspección de la Fig. 3.5) que existe algún punto en el cual mediante el ajuste del parámetro de bifurcación  $R$  y de la ganancia de control lineal  $k_l$ , las bifurcaciones de Hopf pasan de ser supercríticas a subcríticas. Se llevaron a cabo extensas simulaciones en el paquete AUTO [10, 11], en las cuales variando la ganancia del controlador  $k_l$  fueron encontrando en cada corrida dos puntos del diagrama de la Figura 4.1; uno debido a la localización de las bifurcaciones de Hopf y otro a la localización de la aparición de las catástrofes de cielo azul o bifurcaciones globales. Así se encontró que la localización del punto de cruce de estas dos curvas se presenta aproximadamente a  $k_l = -0.6125$



y  $R = 5.375$ .

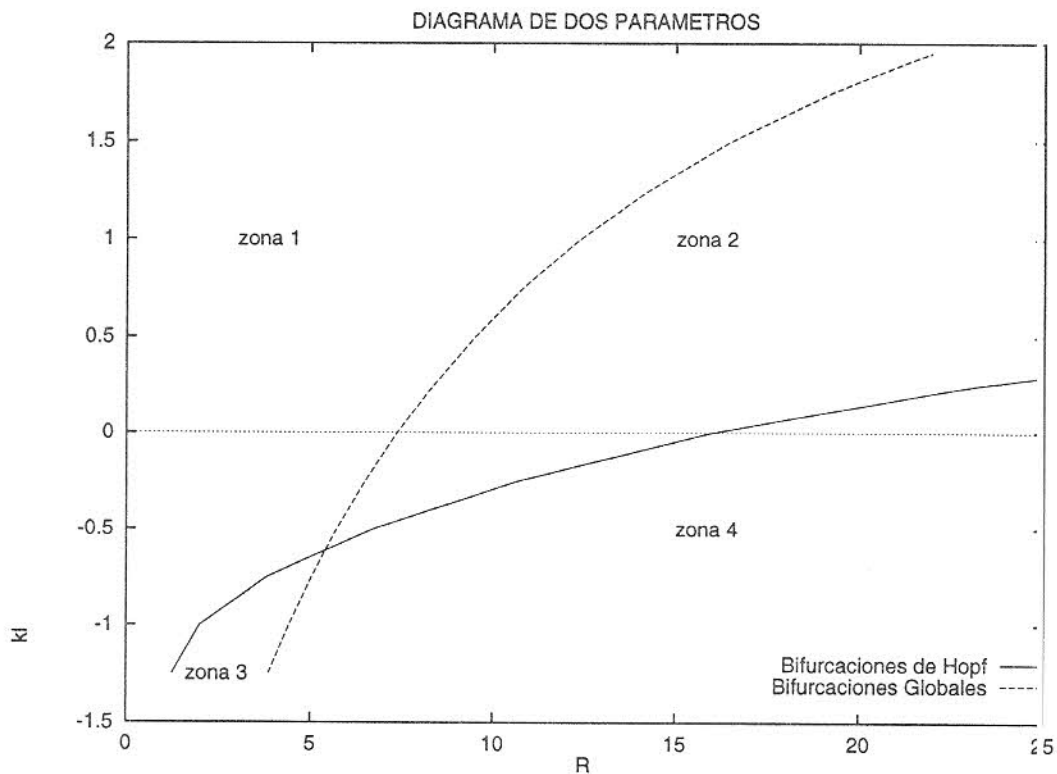


Figura 4.1: Diagrama de dos parámetros,  $R$  vs  $k_l$ , para  $d=0.5$ ; vista parcial.

La figura puede ser dividida en 4 regiones en las que se observa diferente tipo de comportamiento y las cuales han sido marcadas en el diagrama y están delimitadas por las curvas de aparición de las bifurcaciones de Hopf (conexión heteroclínica) y la de bifurcaciones globales (conexión homoclínica). En la *zona 1*, cualquier combinación de  $R$  y  $k_l$  nos dará por resultado que el sistema se comporte de la misma forma que el sistema de lazo abierto para el rango  $1 < R < 7.3198$ , esto es, un sistema estable con dos puntos fijos del tipo sumidero y uno del tipo silla. Cualquier combinación en los parámetros que nos lleve a trabajar en la *zona 2*, nos dará por resultado un tipo de comportamiento de caos transiente

con ciclos límite inestables, tal como el mostrado por el lazo abierto para el rango  $7.3198 < R < 16$ . La *zona 3* estará caracterizada por comportamientos típicos también del caos transiente, pero ahora las bifurcaciones de Hopf resultan en ciclos límite del tipo estable (supercríticas), donde se ha reducido el rango del parámetro de bifurcación sensiblemente. Finalmente la *zona 4* del diagrama nos delimitará a un comportamiento como el observado para rango  $R > 16$  en el lazo abierto donde se da la presencia del típico atractor caótico de Lorenz. Todo lo anterior es discernible de la figura anterior si observamos que cuando se cumple la condición  $k_l = 0$  (que es lo mismo que trazar una línea recta horizontal que pasa por  $R = 0, k_l = 0$ ), es el equivalente a no tener control en el lazo cerrado. De la misma manera podemos concretar de la figura que entre más por encima estemos de la curva que nos marca las bifurcaciones de Hopf (mayor  $k_l$ ), mayor será nuestro rango de valores del parámetro  $R$ , en el que nuestro sistema será “estable”; es decir, esta curva nos marca zonas de estabilidad - inestabilidad en función del valor de los parámetros  $R$  del sistema y  $k_l$  del controlador que estemos utilizando. Aquí es conveniente remarcar que dicha “estabilidad” será también función de la aparición de las bifurcaciones globales (curva punteada en el diagrama), para determinar el tipo de comportamiento que se puede esperar de la respuesta dinámica del sistema. El caos transiente delimitado por la *zona 2* del diagrama dependerá en gran medida de las condiciones iniciales que se estén utilizando. Hay que recordar también que las soluciones periódicas en esta

región son del tipo inestable y que aunque se logre retrasar la aparición en la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf, no sucede lo mismo en forma general con las bifurcaciones globales. Esto se aprecia en el diagrama al percatarnos que la respuesta de la curva de bifurcaciones globales no es tan sensible a los cambios en el valor de la ganancia del controlador, como lo es la curva de bifurcaciones locales. De hecho, la curva de bifurcaciones de Hopf tiene un comportamiento asintótico a valores de  $k_l$  cercanos a 2, mientras que en el comportamiento de la segunda curva dicho cambio es apenas perceptible tal como se muestra en la Figura 4.2.

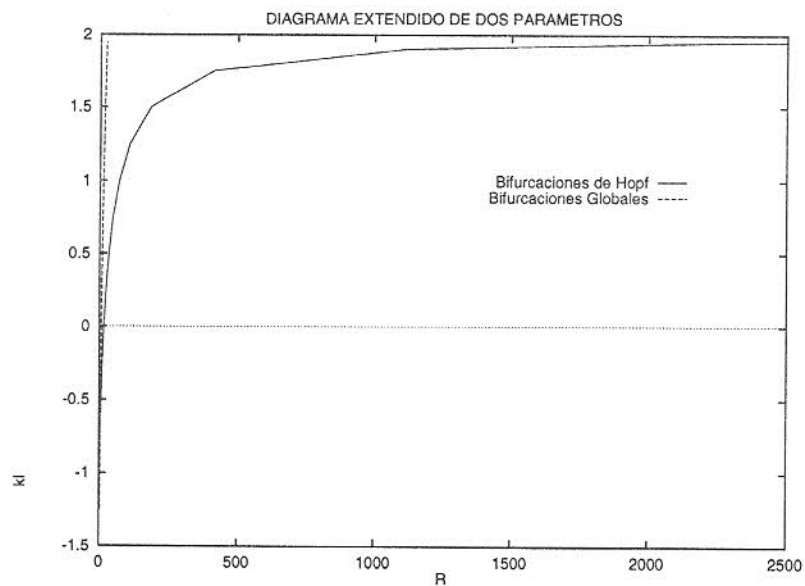


Figura 4.2: Diagrama extendido de dos parámetros,  $R$  vs  $k_l$ , para  $d=0.5$ .

Estos resultados son para un valor fijo del parámetro del filtro de lavado  $d = 0.5$ . Las diferentes regiones fueron caracterizadas mediante el paquete Dstool [16]. En la Figura 4.3 se muestran los diferentes espacios-fase corres-

pondientes a las 4 zonas en que se fue dividida la Figura 4.1.

En el primer caso, tenemos el espacio-fase que obtendríamos con cualquier combinación de los parámetros  $k_l$  y  $R$  que nos lleven a trabajar en la zona 1 del diagrama de la Fig. 4.1, donde se da la presencia de dos puntos del tipo sumidero y uno del tipo nodo de silla. La zona 2 estará caracterizada por comportamientos tales como el mostrado, donde se puede apreciar el espacio-fase característico de un transiente caótico donde se da la presencia de ciclos límite inestables. En la gráfica de la zona 3 de la misma figura, se aprecia un espacio-fase con dos trayectorias, las cuales se asientan en ciclos límite estables, lo cual se puede apreciar observando que los puntos fijos que son el centro de tales ciclos son inestables. El espacio-fase típico de un atractor caótico de Lorenz es el mostrado por la zona 4 del diagrama de la figura.

## 4.2 Análisis de los Eigenvalores

Para valores de  $0 < R < 1$  los eigenvalores del sistema son todos reales y negativos, lo que nos da por resultado un punto de equilibrio simple globalmente atrayente como ya lo hemos visto. En este rango, conforme  $R$  se aproxima a 1 dos de los tres eigenvalores, los más negativos, y sus correspondientes eigenvectores cambian en forma lenta mientras que el tercero lo hace de manera más rápida. Cuando  $R = 1.0$  este último eigenvalor se hace cero, cumpliéndose además las condiciones dadas por las ecuaciones 2.42, 2.43 y 2.44, lo que nos da una bifurcación tipo

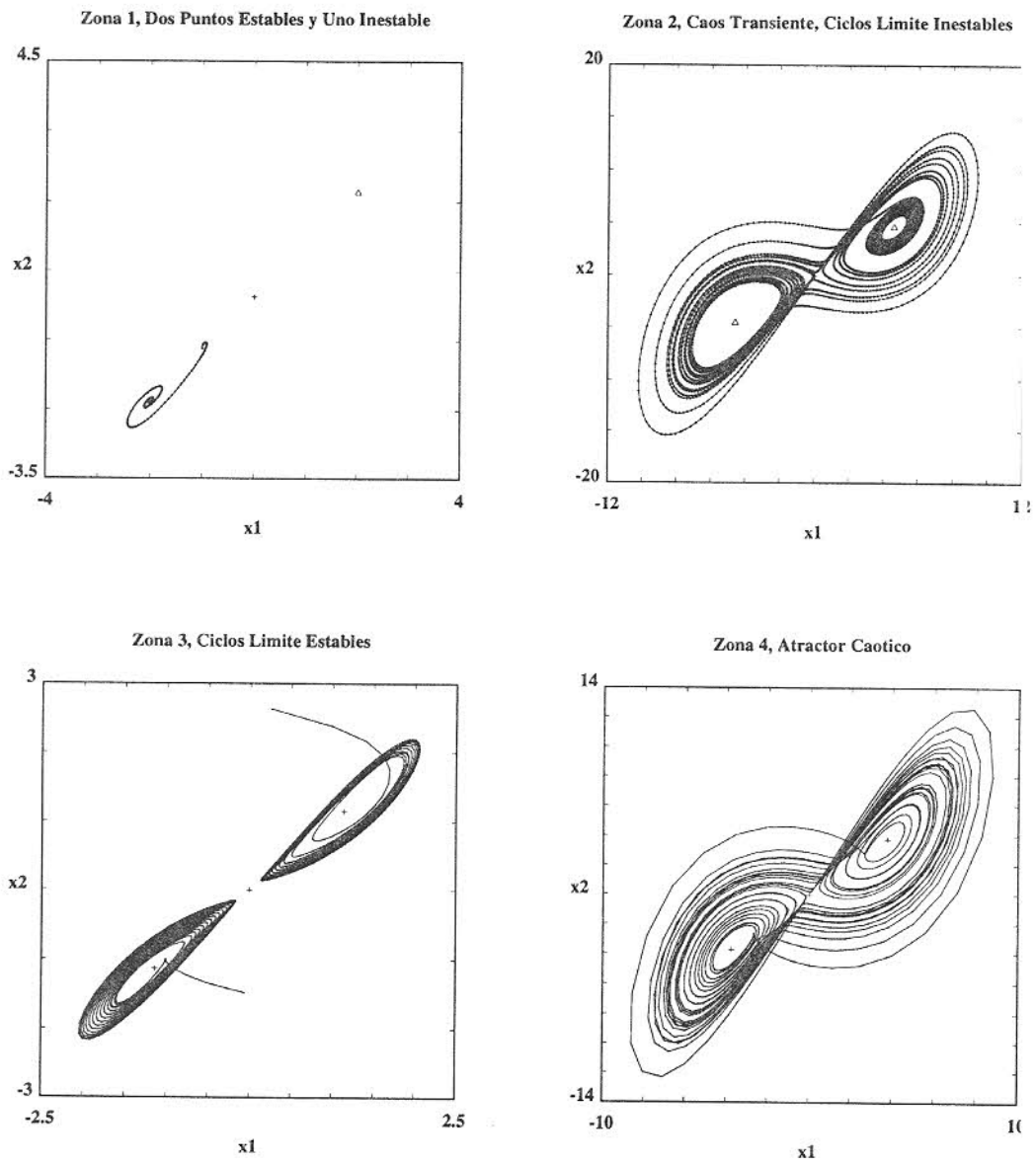


Figura 4.3: Espacios-fases caracterizados del diagrama de dos parámetros.

tridente que ocurre siempre en el mismo valor de  $R$  independientemente de los valores que se tengan en los parámetros  $k_l$  y  $d$ .

Para el rango  $1.0 < R < 7.3198$  tendremos dos áreas de atracción correspondientes cada una a uno de los puntos fijos que han aparecido después de la bifurcación tipo tridente y que en este rango son estables. Dichos puntos emergen del eigenvector del punto de silla cuyo eigenvalor cambia de signo cuando  $R = 1.0$ . En este rango, las trayectorias tenderán hacia cualquiera de los dos puntos estables que han aparecido, dependiendo de las condiciones iniciales, los cuales los identificaremos como  $C+$  y  $C-$ . Ambas zonas de atracción tienen en común una frontera que resulta ser la variedad estable del punto de silla y la cual podemos imaginar como una superficie infinitamente delgada que pasa por el origen (punto de silla) y, por lo mismo es tangente en tal punto al plano descrito por los eigenvectores de la dirección estable del mismo punto casi inmediatamente después de ocurrida la bifurcación tipo tridente, existe la presencia de eigenvalores complejos, lo cual da una naturaleza de sumideros tipo espirales a los puntos fijos estables ( $C+$  y  $C-$ ). Dicha naturaleza se va haciendo más notoria conforme  $R$  aumenta. Así, la parte imaginaria de los estos eigenvalores se hace más grande mientras que la real se vuelve menos negativa y por lo tanto se da la presencia de curvas cada vez más amplias en las trayectorias de aproximación a los puntos estables y por ende, su velocidad de aproximación se vuelve más lenta. Este fenómeno es debido a la deformación que van sufriendo las variedades de tales

puntos.

Al ir incrementando  $R$ , por otro lado, la variedad estable del punto de silla también se va deformando, de tal suerte que si la imaginamos como una hoja infinita que nos marca los límites de las dos zonas de atracción y cuyo centro cae en el origen, sus orillas empezarían con una tendencia desde sus orillas a flexionarse en sentidos opuestos, y dado que la variedad inestable del mismo punto está creciendo, una colisión de ambas estructuras es inevitable. Dicha colisión se da en el valor crítico del parámetro  $R$  de 7.3198 como ya lo habíamos visto, ocasionando grandes cambios en la estructura global de la dinámica observada. De tal forma que existe una nueva dinámica donde se observa una nueva trayectoria que comenzando en el origen sale por la variedad inestable del punto de silla y retorna al mismo por lo que es la variedad estable del mismo punto. A este tipo de bifurcación global se le llama conexión homoclínica y tiene que ver con la catástrofe de cielo azul donde se da la desaparición continua de ciclos límite mediante la colisión de éstos con un punto inestable. De hecho, tales órbitas homoclínicas son vistas como producto de la subcriticidad de las bifurcaciones de Hopf y son importantes en la aparición del caos transiente y movimientos caóticos. En el capítulo 11 de la obra de Thomson y Stewart [32] pueden encontrarse gráficas de todas estas trayectorias.

Después de la conexión homoclínica, las trayectorias aún siguen tendiendo hacia alguno de los puntos fijos estables ( $C+$  ó  $C-$ ), pero muchas trayectorias

cruzan repetidamente de una zona a otra antes de asentarse en alguno de ellos. Dichos transientes caóticos pueden durar por largos intervalos de tiempo dependiendo de las condiciones iniciales, pero el promedio de longitud del transiente caótico inicial se incrementa con  $R$ . Estas trayectorias transientes cruzan de una zona a otra dando vueltas hasta que se ven atrapadas en alguna región de los puntos fijos. Tales regiones resultan ser los ciclos límite inestables producto de la bifurcación de Hopf, que como ya vimos de da a un valor de  $R = 16$  para el lazo abierto. También, a medida que  $R$  se incrementa desde 7.3198 hasta 15.9 dichos ciclos límite tienden a disminuir de amplitud. Finalmente, la parte real de los eigenvalores complejos de  $C+$  y  $C-$  se hace cero y las soluciones periódicas se colapsan sobre los puntos fijos hasta aquí estables (bifurcación de Hopf), y de la colisión de los ciclos inestables con el punto fijo atrayente deja por resultado puntos fijos tipo nodo de silla, tal como lo es el origen desde la bifurcación tridente. A este nuevo colapso entre dos estructuras definidas se le conoce como conexión heteroclínica.

Una vez ocurrida la bifurcación de Hopf, los eigenvalores de  $C+$  y  $C-$  tienen como principal característica el que los complejos conjugados poseen parte real positiva y el(los) restante(s) son reales negativos describiendo las direcciones inestable y estable respectivamente, del atractor caótico global. Donde, dado que no hay un punto de atracción como tal, no existe comportamiento estable, sin embargo existe una región donde no hay tampoco tendencia de las trayectorias



a alejarse de la misma y cuyas condiciones iniciales fuera de ésta eventualmente caen dentro, o quizá muchos atractores que pueden ser del tipo periódico, cuasi-periódico o aún caótico.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los cambios en la geometría de los espacios-fase generados por el sistema de estudio tienen lugar en general, a tres valores del parámetro de bifurcación  $R$ . Dichos valores dependen de los asignados a los parámetros  $k_l$  del controlador y  $d$  del filtro de lavado. Sin embargo, estos tres eventos (bifurcación tridente, conexión homoclínica y conexión heteroclínica) no desaparecen y en el primer caso ni siquiera se mueven. El primer cambio es, por lo tanto independiente del tipo de control que se ha utilizado en el presente trabajo. El segundo evento, es la conexión homoclínica de las ramas estables producto de la primera bifurcación y la cual puede producir transientes caóticos de estructura complicada y ciclos límite estables o inestables. En la conexión heteroclínica los transientes caóticos son convertidos a un atractor caótico global, para el caso de la bifurcación subcrítica de Hopf. Tal tipo de bifurcación no necesariamente produce un atractor caótico

como se puede verificar para el caso de tener una bifurcación supercrítica, donde el producto de la misma son ciclos límite estables. Así, el atractor caótico es creado por una conexión homoclínica de los ciclos límite inestables que finalmente se colapsan en los puntos fijos (que son el centro de las mismas soluciones periódicas) de las ramas que hasta ese momento son estables.

En el proceso de la construcción numérica de los diagramas de bifurcación, se analizaron las variaciones de la respuesta dinámica del controlador respecto a los parámetros  $R$  del sistema,  $k_l$  del controlador y  $d$  del filtro de lavado. Se caracterizaron las diferentes zonas delimitadas en dichos diagramas mediante el estudio de los espacios-fase generados por los valores característicos de cada región. Se ha comprobado que es posible estabilizar los puntos de equilibrio inestables que son consecuencia de la aparición de las bifurcaciones de Hopf, utilizando retroalimentación dinámica lineal. Sin embargo, la “atractividad” de los puntos de equilibrio estabilizados permanece confinada a una vecindad local, pudiendo presentarse comportamiento del tipo caótico dependiendo de las condiciones iniciales y/o magnitud de las perturbaciones utilizadas. Los filtros de lavado son efectivos en el adelanto (retraso) de la aparición de las bifurcaciones de Hopf, incrementando (disminuyendo) así, el rango de operación “estable” de un punto de equilibrio, sin modificar su posición. Asimismo, este tipo de control parece ser robusto ante incertidumbres en el modelamiento de los sistemas. A pesar de esta conclusión positiva, el sistema de lazo cerrado con la incorporación de las

leyes de control dadas anteriormente, no garantiza en modo alguno la atractividad global. Aún cuando la presencia de atractores caóticos puede retardarse significativamente (hasta valores de  $R$  superiores a 2500), el sistema continúa exhibiendo transientes caóticos para valores de  $R$  muy cercanos a los de la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf originales ( $R$  de aproximadamente 21.45983 para cuando  $k_l \rightarrow 2$ ). La presencia de transientes caóticos es un fenómeno indeseable desde un punto de vista de control, dado que puede implicar operación alejada del punto de equilibrio deseado por grandes intervalos de tiempo.

## 5.1 Trabajo Futuro.

Se ha trabajado en la dirección de la estabilización de las bifurcaciones, más que en su adelanto y/o retardo. Los resultados de tales investigaciones pueden encontrarse en la bibliografía [35, 34], sin embargo, hace falta profundizar más acerca del tema y de las diferentes técnicas que se han utilizado y las que se están usando. No es raro encontrar cada día nuevos avances acerca de temas afines y mientras algunos investigadores tienden hacia el camino científico [1, 4, 12, 13, 14, 18, 17, 26, 27, 29, 28, 30], otros buscan la innovación tecnológica y aplicación de los conceptos y técnicas [6, 5, 25, 8, 9, 19, 22, 24, 20], que hasta ahora sólo han sido llevadas a cabo en simuladores.

Sería interesante investigar la robustez de los controladores basados en filtros de lavado ante mayores incertidumbres en la modelación de los sistemas, tratando

de delimitar la aplicabilidad de tal procedimiento. Asimismo, es importante buscar mejorar la respuesta del sistema en presencia de caos como el tipo transiente mediante esquemas de variación de parámetros del filtro, utilizando por ejemplo, el algoritmo de horizonte recedente.

Además del interés de estas técnicas en aplicaciones de control, el control de bifurcaciones tiene aplicación práctica en comunicaciones, plantas de poder, sistemas mecánicos, etc. Resulta interesante el desarrollar tecnología basada en esta línea de investigación y se pueden encontrar trabajos ya desarrollados a cerca del tema [4, 12, 13, 14, 18, 17, 26, 27, 29, 28, 30, 6, 5, 25, 8, 9, 19, 22, 24, 20, 7, 33, 2]. Sin embargo, aún hay mucho de este tipo de control y de la dinámica de los sistemas no lineales que se desconoce y en lo cual resultaría conveniente, una mayor profundidad.

# Bibliografía

- [1] E.H. Abed, H.O. Wang, y R.C. Chen. Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos. *Physica D*, 70:154–164, 1994.
- [2] D. Auerbach, C. Grebogi, E. Ott, y J. A. Yorke. Controlling chaos in high dimensional systems. *Phys. Rev. Letters*, 69:3479–3482, 1992.
- [3] J. Baillieul, R. W. Brockett, y R. B. Washburn. Chaotic motion in nonlinear feedback systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 11:990–997, 1980.
- [4] B. W. Bequette. Nonlinear control of chemical processes: A review. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 30:1391–1413, 1991.
- [5] T. L. Carroll y L. M. Pecora. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38:453–456, 1991.
- [6] T. L. Carroll y L. M. Pecora. A circuit for studying the synchronization of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2:659–667, 1992.

- [7] F-C. Chen. Back-propagation neural networks for nonlinear self-tuning adaptive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 4:44–48, 1990.
- [8] K. M. Cuomo y A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with application to communications. *Phys. Rev. Letters*, 71:65–68, 1993.
- [9] K. M. Cuomo y A. V. Oppenheim. Robustness and signal recovery in a synchronized chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3:1629–1638, 1993.
- [10] E. J. Doedel. AUTO: A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. *Cong. Num.*, 30:265–284, 1981.
- [11] E. J. Doedel y J. P. Kernévez. AUTO: A program for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations. *Applied Mathematics Report, California Institute of Technology*, pages 1–226, 1986.
- [12] T. B. Fowler. Application of stochastic control techniques to chaotic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:200–205, 1989.
- [13] H. Gang y H. Kaifen. Controlling chaos in systems described by partial differential equations. *Phys. Rev. Letters*, 71:3794–3797, 1993.
- [14] C. Grebogi, E. Ott, y J. A. Yorke. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science*, 238:632–638, 1987.

- [15] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, Heidelberg, 1983.
- [16] J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin, y P. A. Worfolk. Dstool: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface. *Center For Applied Mathematics Cornell University, Ithaca NY*, 1991.
- [17] R. He y P. G. Vaidya. Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems. *Physical Review A*, 46:7387–7392, 1992.
- [18] E. R. Hunt. Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator. *Phys. Rev. Letters*, 67:1953–1955, 1991.
- [19] T. Kapitaniak, L. O. Chua, y G.-Q. Zhong. Experimental synchronization of chaos using continuous control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4:483–488, 1994.
- [20] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert, y L. O. Chua. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2:709–713, 1992.
- [21] H.-C. Lee y E. H. Abed. Washout filters in the bifurcation control of eighth order flight dynamic. *Proc. American Control Conferencial*, pages 206–211, 1991.



- [22] R. Lozi y L. O. Chua. Secure communications via chaotic synchronization ii: Noise reduction by cascading two identical receivers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3:1319–1325, 1993.
- [23] E. Ott, C. Grebogi, y J. A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Letters*, 64:1196–1199, 1990.
- [24] U. Parlitz, L. O. Chua, L. Kocarev, K.S. Halle, y A. Shang. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2:973–977, 1992.
- [25] L. M. Pecora y T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Letters*, 64:821–824, 1990.
- [26] I. B. Schwartz y I. Triandaf. Tracking unstable orbits in experiments. *Phys. Rev. Letters*, 46:7439–7444, 1992.
- [27] T. Shinbrot, W. Ditto, C. Grebory, E. Ott, M. Spano, y A. Yorke. Using the sensitive dependence of chaos ( the butterfly effect ) to direct trajectories in an experimental chaotic system. *Phys. Rev. Letters*, 68:2863–2866, 1992.
- [28] T. Shinbrot, C. Grebory, E. Ott, y A. Yorke. Using chaos to direct trajectories to targets. *Phys. Rev. Letters*, 65:3215–3218, 1990.
- [29] T. Shinbrot, C. Grebory, E. Ott, y A. Yorke. Using small perturbations to control chaos. *Nature*, 363:411–417, 1993.

[30] J. Singer, Z. Wang, y H. Bau. Controlling a chaotic system. *Phys. Rev. Letters*, 66:1123-1125, 1991.

[31] G. Stephanopoulos. *Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.

[32] J. M. Thomson y H. B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons, 1986.

[33] A. Uppal, W. H. Ray, y A. B. Poore. On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 29:967-985, 1974.

[34] H. O. Wang. Control of bifurcations and routes to chaos in dynamical systems. *Ph.D. Dissertation. University of Maryland, College Park, Maryland*, 20742.

[35] H. O. Wang y E. H. Abbed. Bifurcation control of chaotic dynamical systems. *Institute for Systems Research, U. of Maryland, College Park, MD., Report TR 92-67*, 1992.

[36] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1990.