

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CELAYA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA

**ROBUSTEZ EN CONTROLADORES  
RETROALIMENTADOS**

POR

**JESÚS RAÚL ORTIZ DEL CASTILLO**

TESIS PRESENTADA AL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

CELAYA, GTO.

FEBRERO 2005

Celaya, Gto., **2005-FEBRERO-14**

**Depto. de Ingeniería Química  
Oficio 027/04.**

**Asunto:** Aprobación de Impresión Tesis de Doctorado

**Dr. Richart Vázquez Román**

Jefe de Depto. de Ingeniería Química  
Presente.

De acuerdo con la convocatoria hecha por esa Jefatura a su cargo, con el fin de determinar la Aprobación de Impresión del Proyecto de Doctorado, titulado:

**"ROBUSTEZ EN CONTROLADORES RETROALIMENTADOS"**

El (la) **M.C. JESÚS RAÚL ORTIZ DEL CASTILLO**, comunica a usted que esta Comisión Revisora de Tesis ha tenido a bien aprobar la impresión de este trabajo.

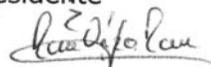
Lo anterior, para los efectos consiguientes.

Atentamente

**"La Técnica por un México Mejor"**



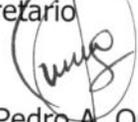
Dr. Arturo Jiménez Gutiérrez  
Presidente



Dr. Richart Vázquez Román  
Vocal



Dr. Vicente Rico Ramírez  
Secretario



Dr. Pedro A. Quintana Hernández  
Vocal suplente



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
DIRECCIÓN GENERAL DE  
INSTITUTOS TECNOLÓGICOS  
DEPTO. DE ING. QUÍMICA  
TECNOLÓGICO DE CELAYA.

c.c.p. Sinodales  
Expediente

## **ROBUSTEZ EN CONTROLADORES RETROALIMENTADOS**

Por Jesús Raúl Ortiz del Castillo

Asesor: Dr. Arturo Jiménez Gutiérrez

El diseño de sistemas de control está basado en modelos que son una aproximación a la planta real, ya que sería imposible contar con un modelo exacto. Sin embargo, es necesario que los controladores sean eficientes a pesar de las incertidumbres del proceso. No obstante lo anterior, no se han reportado métodos de análisis o sintonización de sistemas de control en donde se use algún índice de robustez. En el presente trabajo se utiliza el margen de robustez como un parámetro para el análisis y diseño de sistemas de control con mayor estabilidad robusta. El margen de robustez es el máximo nivel de variación que pueden presentar los parámetros inciertos sin que el sistema se vuelva inestable. Se analizaron varios sistemas de una entrada y una salida para el estudio del margen de robustez en función de los parámetros de los controladores PI, PID, PII<sup>2</sup> e IMC. El efecto de los parámetros de sintonización sobre el margen de robustez se estudió por medio de la ecuación característica del sistema, y se desarrollaron metodologías de sintonización basadas en el análisis de robustez de los diferentes controladores. Los resultados muestran que con la metodología de sintonización propuesta se pueden obtener sistemas más robustos y con un buen comportamiento dinámico. Para el estudio de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas se analizaron la Secuencia Térmicamente Acoplada Directa, la Secuencia Térmicamente Acoplada Indirecta y la secuencia Petlyuk en la separación de tres diferentes mezclas ternarias. Las secuencias se estudiaron a lazo abierto empleando la descomposición en valores singulares. Los valores singulares mínimos y el número de condición pueden dar una indicación del comportamiento que se tendrá al cerrar el lazo de control. Las secuencias se estudiaron a lazo cerrado en aspectos de robustez empleando el margen de robustez y en aspectos de desempeño utilizando el integral del error absoluto, al usar controladores PI, PII<sup>2</sup> e IMC. Se compararon las diferentes secuencias y los diferentes controladores en robustez y desempeño, detectando las secuencias y los controladores con mejor desempeño, y las secuencias y controladores más robustos. Los resultados generales indican que el presentar el mejor desempeño dinámico no garantiza tener la mayor robustez, por lo cual es necesario que al realizar la sintonización exista un compromiso entre el desempeño dinámico y la robustez.

"Un caballo no tiene ubres  
ni la vaca puede relinchar,  
y arriba es abajo, y los caminos  
laterales están justo delante, Cord el  
buscador.

Ata a dos pájaros juntos,  
sin importan que tengan cuatro alas  
no podrán volar."

*La Flauta Silenciosa*

# Dedicatoria

A Dios

*Detrás de cada puerta que la ciencia abre se encuentra Dios*

A mi mamá, María Teresa

*Madre es la imagen más clara en la tierra del rostro de Dios*

A mi papá, J. Jesús

*No es la carne ni la sangre, sino el corazón el que nos hace padre e hijo*

A mi esposa, Andrea

*Te amo no sólo por lo que eres, sino por lo que soy cuando estoy contigo*

A mis hijos, Jesús Raúl y Andrea Carolina

*Los hijos son el verdadero secreto de la inmortalidad*

# Agradecimientos

Al Dr. Arturo Jiménez Gutiérrez por la paciencia que tuvo en asesorar el presente trabajo, y por los momentos compartidos durante nuestras reuniones académicas y no académicas.

Al Dr. Vicente, Dr. Richard, Dr. Pedro y Dr. Alberto por aceptar formar parte del comité revisor del trabajo, y por los comentarios que lo enriquecieron.

A mis compañeros de posgrado por la amistad que me brindaron, y por los momentos que compartimos: Omar Jair, Angel, Nancy, Yeny, Geras, Super George, Tejas, Artur, Alberto (y Karla), Ulises y Floreane. En particular quiero agradecer a los compañeros con los que más conviví: Oscar (y Erika), Claudia, Miguel, Nelly, Don Carmen, Sergio y especialmente a Ma. Guadalupe por la amistad desinteresada que siempre tienen para mí y mi familia.

Al personal del departamento July, Irma, Judtih y Claudia por ser siempre tan serviciales.

Todo mi agradecimiento a la Universidad Autónoma de Sinaloa por otorgarme el permiso de realizar estudios de doctorado. Al área de Ing. Química, a MC Marco Antonio Parra e Ing. Ignacio Calderón por apoyarme incondicionalmente y cubrirme en los espacios que deje. A mis compañeros de la Facultad de Ciencias Químico Biológicas: Dr. Reyes, Dr. Ordorica, Ing. Osuna, etc. por el apoyo que me otorgaron desde el principio.

A mi familia porque gracias a la paciencia que ha tenido pude llegar a la conclusión de este trabajo.

Al CONACYT y DGIT por el apoyo económico proporcionado.

# Tabla de contenido

Lista de figuras.....	vii
Lista de tablas.....	xi
Nomenclatura.....	xiii
Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Justificación del trabajo.....	3
1.3 Objetivos del trabajo.....	4
1.4 Descripción del contenido.....	4
Capítulo 2: Antecedentes en Control Robusto.....	6
2.1 Introducción.....	6
2.2 Familia de polinomios de intervalo.....	7
2.3 Teorema de Kharitonov.....	7
2.4 Planta de intervalo con retroalimentación.....	9
2.5 Función de Tsykin y Polyak.....	10
2.6 Aplicación del margen de robustez.....	12
Capítulo 3: Robustez en Controladores PI y PID.....	14
3.1 Introducción.....	14
3.2 Casos de estudio.....	15
3.3 Análisis de robustez.....	16
3.4 Sintonización de controladores PI y PID.....	22
3.5 Conclusiones.....	28
Capítulo 4: Robustez en Controladores PII <sup>2</sup> .....	30

4.1	Introducción .....	30
4.2	Análisis de robustez .....	32
4.3	Robustez en la sintonización del controlador $PII^2$ .....	36
4.4	Conclusiones .....	42
Capítulo 5: Robustez en Controladores IMC .....		44
5.1	Introducción .....	44
5.2	Análisis de robustez .....	47
5.3	Robustez en la sintonización del controlador IMC .....	51
5.4	Conclusiones .....	57
Capítulo 6: Robustez en Controladores Multivariables .....		58
6.1	Introducción .....	58
6.2	Descomposición en valores singulares .....	59
6.3	Función de transferencia para sistemas MIMO .....	62
6.4	Aplicaciones a secuencias de destilación térmicamente acopladas .....	65
6.5	Casos de estudio .....	68
6.5.1	Caso 1 .....	68
6.5.2	Caso 2 .....	68
6.5.3	Caso 3 .....	69
6.6	Análisis de resultados .....	69
6.7	Conclusiones .....	94
Capítulo 7: Conclusiones y Sugerencias .....		95
7.1	Conclusiones .....	95
7.2	Recomendaciones .....	96
Referencias .....		98
Apéndice A: Ecuaciones Características .....		103
Apéndice B: Parámetros Obtenidos en las Sintonizaciones .....		107
Apéndice C: Códigos en MATLAB .....		111

# Lista de figuras

<i>Descripción</i>	<i>Página</i>
Figura 2.1: Movimiento del rectángulo de Kharitonov .....	9
Figura 2.2: Gráfica de la función $G_{TP}$ .....	12
Figura 3.1: Sistemas estudiados .....	16
Figura 3.2: Margen de robustez del un controlador PI, para el Caso $a$ .....	17
Figura 3.3: Margen de robustez del controlador PID, en el Caso $a$ manteniendo $\tau_D$ constante.....	18
Figura 3.4: Margen de robustez del controlador PID en el Caso $a$ manteniendo $K_C$ constante.....	19
Figura 3.5: Margen de robustez para un controlador PID en el Caso $a$ manteniendo $\tau_I$ constante.....	20
Figura 3.6: Margen de robustez para un controlador PID en el Caso $b$ manteniendo $K_C$ constante.....	20
Figura 3.7: Margen de robustez del un controlador PID en el Caso $b$ manteniendo $\tau_I$ constante.....	21
Figura 3.8: Algoritmo de sintonización .....	23
Figura 3.9: Comparación de robustez para el controlador PI.....	24
Figura 3.10: Respuesta del Caso $a$ para un cambio escalón.....	25
Figura 3.11: Respuesta del Caso $b$ para un cambio escalón.....	25
Figura 3.11: Respuesta del Caso $d$ con $D = 0.1$ .....	25
Figura 3.12: Comparación de robustez para el controlador PID.....	26

Figura 3.13: Respuesta del Caso <i>e</i> con $D = 0.4$ y $\tau_z = 0.2$ .....	28
Figura 3.14: Respuesta del Caso <i>e</i> con $D = 0.8$ y $\tau_z = 1.6$ .....	28
Figura 4.1: Análisis de robustez del controlador $PII^2$ en el Caso <i>a</i> con $K_C$ constante.....	32
Figura 4.2: Análisis de robustez del controlador $PII^2$ en el Caso <i>b</i> con $K_C$ constante.....	33
Figura 4.3: Análisis de robustez del controlador $PII^2$ en el Caso <i>a</i> con $\tau_I$ constante.....	33
Figura 4.4: Análisis de robustez del controlador $PII^2$ en el Caso <i>b</i> con $\tau_I$ constante.....	34
Figura 4.5: Robustez del controlador $PII^2$ para el Caso <i>d</i> con $D = 0.1$ .....	35
Figura 4.6: Robustez del controlador $PII^2$ para el Caso <i>e</i> con $\tau_z = 0.2$ y $D =$ $0.2$ .....	35
Figura 4.7: Error a lazo cerrado para el Caso <i>d</i> con $D = 0.1$ .....	36
Figura 4.8: Diagrama de flujo para la sintonización del controlador $PII^2$ .....	37
Figura 4.9: Comparación del margen de robustez.....	39
Figura 4.10: Respuesta del Caso <i>a</i> para un cambio escalón en el set point .....	39
Figura 4.11 Respuesta del Caso <i>d</i> , con $D = 5$ , para un cambio escalón en el set point .....	40
Figura 4.12 Respuesta del Caso <i>a</i> con la planta modificada .....	42
Figura 5.1: Estructura del controlador IMC.....	45
Figura 5.2: Análisis de robustez del controlador IMC para el Caso <i>a</i> .....	48
Figura 5.3: Error en la respuesta a un cambio escalón en el set point para en el Caso <i>a</i> .....	48
Figura 5.4: Análisis de robustez para el Caso <i>c</i> .....	49
Figura 5.5: Error para la respuesta a una cambio escalón en el set point para en el Caso <i>c</i> .....	50
Figura 5.6: Análisis de robustez para el Caso <i>d</i> con $D = 0.2$ y $\tau_z = 0.2$ .....	50
Figura 5.7: Error para la respuesta a una cambio escalón en el set point para el Caso <i>d</i> con $D = 0.2$ y $\tau_z = 0.2$ .....	51
Figura 5.8: Diagrama de flujo para la sintonización de controlador IMC .....	52

Figura 5.9: Comparación del margen de robustez .....	53
Figura 5.10: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso <i>a</i> .....	54
Figura 5.11: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso <i>e</i> con $D = 0.8$ y $\tau_z = 0.4$ .....	55
Figura 5.12: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso <i>e</i> ( $D = 0.8$ y $\tau_z = 0.4$ ) con la planta modificada .....	56
Figura 6.1: Diferentes secuencias de destilación térmicamente acopladas .....	66
Figura 6.2: Respuesta en la Petlyuk Caso 2 para un cambio en el reflujo (R) .....	71
Figura 6.3: Respuesta en la Petlyuk Caso 2 para un cambio en la salida lateral (LS) .....	71
Figura 6.4: Respuesta en la Petlyuk Caso 2 para un cambio en la carga térmica (Q) .....	72
Figura 6.5: Valores singulares mínimos para el Caso 1 .....	77
Figura 6.6: Número de condición para el Caso 1 .....	78
Figura 6.7: Valores singulares mínimos para el Caso 2 .....	78
Figura 6.8: Número de condición para el Caso 2 .....	79
Figura 6.9: Valores singulares mínimos para el Caso 3 .....	80
Figura 6.10: Número de condición para el Caso 3 .....	81
Figura 6.11: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado para la secuencia STAD, Caso 1 .....	82
Figura 6.12: Respuestas dinámicas de la composición en el rectificador lateral para la secuencia STAD, Caso 1 .....	83
Figura 6.13: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia STAD, Caso 1 .....	84
Figura 6.14: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado para la secuencia STAI, Caso 1 .....	84
Figura 6.15: Respuestas dinámicas de la composición en el agotador lateral para la secuencia STAI, Caso 1 .....	85

Figura 6.16: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia STAI, Caso 1 .....	86
Figura 6.17: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado de la secuencia Petlyuk, Caso 1 .....	86
Figura 6.18: Respuestas dinámicas de la composición en la extracción lateral para la secuencia Petlyuk, Caso 1 .....	87
Figura 6.19: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia Petlyuk, Caso 1 .....	88
Figura 6.20: Resultados del margen de robustez para la secuencia STAD.....	89
Figura 6.21: Resultados de robustez para la secuencia STAI .....	89
Figura 6.22: Resultados del margen de robustez para la secuencia Petlyuk....	90
Figura 6.23: Resultados de IAE para la secuencia STAD.....	92
Figura 6.24: Resultados de IAE para la secuencia STAI .....	92
Figura 6.25: Resultados de IAE para el controlador Petlyuk .....	93

# Lista de tablas

<i>Descripción</i>	<i>Página</i>
Tabla 6.1: Mezcla Ternaria del Caso 1	68
Tabla 6.2: Mezcla Ternaria del Caso 2	69
Tabla 6.3: Mezcla Ternaria del Caso 3	69
Tabla 6.4: Tipos de funciones de transferencia consideradas	73
Tabla 6.5: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAD	
Caso 1 .....	73
Tabla 6.6: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAI	
Caso 1 .....	74
Tabla 6.7: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia Petlyuk	
Caso 1 .....	74
Tabla 6.8: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAD	
Caso 2 .....	74
Tabla 6.9: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAI	
Caso 2 .....	75
Tabla 6.10: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia Petlyuk	
Caso 2 .....	75
Tabla 6.11: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAD	
Caso 3 .....	75
Tabla 6.12: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia STAI	
Caso 3 .....	76

Tabla 6.13: Matriz de funciones de transferencia para la secuencia Petlyuk Caso 3 .....	76
Tabla B.1: Resultados de la sintonización de los controladores PI.....	107
Tabla B.2: Resultados de la sintonización de los controladores PID.....	109
Tabla B.3: Resultados de la sintonización de los controladores PII <sup>2</sup> .....	110
Tabla B.4: Resultados de la sintonización de los controladores IMC.....	110

# Nomenclatura

$D(s)$	Perturbaciones en la carga
$D$	Tiempo muerto
ESI	Índice de facilidad de separación
$F$	Flujo de alimentación
$g_1$ y $g_2$	Ganancias del estimador de incertidumbres
$G_C$	Función de transferencia del proceso
$G_m$	Función de transferencia del dispositivo de medición
$G_f$	Función de transferencia del filtro
$G_F$	Función de transferencia del elemento de control final
$G_\mu$	Función de transferencia del modelo
$G_P$	Función de transferencia del proceso
$G_{TP}$	Función de Tsytkin-Polyak
$G_{cp}$	Inversa de la parte invertible del modelo
IAE	Integral del error absoluto
IMC	Control de modelo interno
ISE	Integral del error al cuadrado
$j$	Número imaginario
$K_1, K_2, K_3, K_4$	Polinomios de Kharitonov
$K_C$	Ganancia del controlador
$K_e$	Ganancia del doble integral para el controlador PII <sup>2</sup>
$K_p$	Ganancia del proceso a lazo a lazo abierto
$L$	Estimador de incertidumbres

LS	Flujo de extracción lateral
MIMO	Múltiples entradas múltiples salidas
PI	Controlador proporcional integral
PID	Controlador proporcional integral derivativo
PII <sup>2</sup>	Controlador proporcional integral doble integral
$P$	Polinomio en $s$
$p_0$	Polinomio nominal
$\mathbf{q}$	vector incertidumbre
Q	Conjunto límite de $\mathbf{q}$
QR	Carga térmica
R	Reflujo
$r_{\max}$	Margen de robustez
$s$	Variable en el dominio de Laplace
SISO	Sistema de una entrada y una salida
STAD	Secuencia Térmicamente Acoplada Directa
STAI	Secuencia Térmicamente Acoplada Indirecta
SVD	Descomposición en valores singulares
U	Matriz unitaria de los vectores singulares de salida $u$
V	Matriz unitaria de vectores singulares de entrada $v$
$y$	Respuesta de la variable controlada
Y	Matriz de las variables controladas
ZN	Ziegler Nichols
Letras griegas	
$\alpha$	Volatilidad relativa
$\gamma$	Número de condición
$\varepsilon$	Factor de escala
$\tau$	Constante de tiempo del proceso a lazo abierto
$\tau_I$	Constante de tiempo integral
$\tau_C$	Constante de tiempo a lazo cerrado para el controlador PII <sup>2</sup>
$\tau_D$	Constante de tiempo integral

$\tau_f$	Constante de tiempo del filtro
$\tau_z$	Valor de la respuesta inversa
$\sigma$	Valor singular
$\Sigma$	Matriz de valores singulares
$\omega$	Frecuencia

Subíndice y superíndice

+	Parte no invertible
-	Parte invertible
H	Transpuesta conjugada
min	Mínimo
max	Máximo
SP	Set point
T	Transpuesta

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

El control de procesos es una herramienta fundamental para poder operar correctamente una planta de procesos físicos y/o químicos. Controlar es ajustar los grados de libertad disponibles (variables de entrada manipulables) para lograr una operación aceptable (estable).

Una planta de procesos puede contener decenas de lazos de control, ocasionando dificultades en el diseño de los controladores, sobre todo por las interacciones existentes entre dichos lazos de control (Larsson y Skogestad, 2000).

Los objetivos del control de procesos –seguridad, protección ambiental, protección de los equipos, operación suave, control de calidad, etc.– se alcanzan manteniendo las variables de las plantas lo más cercano posible a sus mejores condiciones. La variabilidad de las variables de su mejor valor puede ser reducida ajustando las variables de entrada utilizando el control retroalimentado.

Cada uno de los elementos del sistema retroalimentado se pueden escribir como una función de transferencia relacionando sus salidas con sus entradas. El denominador de la función de transferencia global para un cambio en el set point o un cambio en la carga es el

mismo. Este denominador está dado por  $1 +$  el producto de las funciones de transferencia dentro del lazo, y se conoce como ecuación característica.

$$Ec = \mathbf{1} + G_p G_m G_c G_f \quad 1.1$$

El criterio de estabilidad es independiente del tipo de cambio, ya sea en el set point o en la carga. Esto se debe a que las raíces de la ecuación característica, común en ambos cambios, determinan la estabilidad a lazo cerrado. Un sistema de control retroalimentado es estable si la parte real de todas las raíces de su ecuación característica son negativas, es decir, las raíces están localizadas en la parte izquierda del plano imaginario. Si cualquiera de las raíces de la ecuación característica tiene parte real positiva, el sistema retroalimentado es inestable.

Sintonizar un controlador es seleccionar los mejores valores de los parámetros ajustables del controlador retroalimentado. El procedimiento de sintonización de un sistema de control está centrado en el modelo del proceso. Este modelo es una aproximación a la realidad, ya que no es posible obtener un modelo que represente exactamente a la planta, independientemente de la técnica de diseño empleada. Esto se debe a cambios en las condiciones ambientales (temperatura ambiente, humedad, etc.), cambios en la alimentación, cambios en la actividad del catalizador, cambios con el tiempo en los parámetros de la planta, y cambios ocasionados por perturbaciones o diferentes condiciones de operación. Estos cambios son imposibles de capturar en un modelo; sin embargo, en la práctica se debe contar con un controlador que sea eficiente a pesar de la inexactitud presente en el modelo. Si en la sintonización se desprecian las incertidumbres del modelo, se obtendrá un controlador inflexible que se puede volver inestable en una planta real. Es por ello que el controlador debe ser “insensible” a este tipo de incertidumbres, esto es, el controlador debe ser *robusto* (Morari y Zafiriou, 1989). El atributo robusto se utiliza para describir al controlador que funciona para el modelo nominal, y cuando el modelo presenta incertidumbres (Barnish 1988, 1994). Las técnicas de control robusto permiten el diseño de sistemas de control que garanticen un buen funcionamiento del proceso, no obstante las incertidumbres existentes en el modelo de la planta.

Mientras que el criterio de *estabilidad nominal* indica si el sistema es o no estable, la *estabilidad robusta* se determina si el sistema es estable para todas las plantas perturbadas,

---

---

desde el modelo nominal hasta el peor caso de las incertidumbres del modelo (Skogestad y Postlethwaite, 1996).

Gran parte de los problemas de la teoría del control moderno involucran incertidumbres (Barmish, 1994). Las incertidumbres se pueden modelar como *incertidumbres estructuradas* y como *incertidumbres no estructuradas*. En el primer caso se supone un buen conocimiento del proceso pero algunos coeficientes del modelo pueden presentar variaciones, mientras que en el segundo caso el proceso no está del todo comprendido por lo que al modelo se añaden términos aditivos o multiplicativos.

Muchos procesos químicos son lo suficientemente conocidos para considerar que los errores de los modelos se deben a variaciones en sus parámetros, y no a errores en la modelación. Es por ello que los sistemas con incertidumbre estructurada son importantes en ingeniería química.

En el presente trabajo como medida de la robustez se emplea el *margen de robustez*, el cual representa la máxima variación que pueden tomar los parámetros inciertos antes de que el sistema se vuelva inestable.

## 1.2 Justificación del trabajo

Los controladores PI y PID son ampliamente utilizados en los procesos industriales, por lo cual se han reportado un gran número de métodos de sintonización. Existen métodos basados en la estabilidad (Ziegler y Nichols, 1942, Tyreus y Luyben, 1992), métodos basados en el desempeño dinámico (López y col., 1969, Ciacone y Marlin, 1992) y métodos basados en la respuesta deseada a lazo cerrado (Smith y col., 1975). La mayoría de estos métodos están restringidos a un modelo simple de la planta (un sistema de primer orden con tiempo muerto). Además, en las diferentes metodologías no se utiliza un parámetro numérico para medir la robustez. Por otro lado, se han publicado diferentes controladores, en teoría más robustos, como el controlador  $PII^2$  (Alvarez-Ramirez y col., 1997a) y el controlador IMC (García y Morari 1982, 1985a y 1985b), a los que tampoco se les ha realizado un análisis de robustez. La función de Tsytkin-Polyak (1991) proporciona una herramienta para medir el margen de robustez y, a pesar de tener varios años publicada, no se ha aplicado en el diseño de sistemas de control. Soto Becerra (1995) utilizó el margen de robustez en el análisis de

---

---

sistemas previamente sintonizados con Ziegler Nichols (ZN), pero no estudió la influencia que tienen los parámetros de los controladores en la robustez. Soto Becerra (2002) utilizó el margen de robustez para comparar diferentes alternativas de diseño de Secuencias de Destilación Térmicamente Acopladas con retroalimentación constante, pero sin emplear controladores en su estudio.

### 1.3 Objetivos del trabajo

Los objetivos que se pretenden alcanzar con el presente trabajo son:

- Elaborar un algoritmo para determinar numéricamente el *margen de robustez*, empleando la función de Tsytkin-Polyak (1991).
- Analizar el comportamiento del margen de robustez en función de los parámetros de sintonización de los controladores PI, PID, PII<sup>2</sup> e IMC, para ello se emplearán varios casos de estudio provenientes de diferentes áreas de la Ingeniería Química que corresponderán a sistemas de una entrada y una salida (SISO por sus siglas en inglés).
- Desarrollar algoritmos para la sintonización robusta de dichos controladores basados en los resultados del análisis realizado con las teorías de control robusto para sistemas con incertidumbre estructurada.
- Analizar la robustez de sistemas de control de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO por sus siglas en inglés), tomando como caso de estudio las Secuencias de Columnas de Destilación Térmicamente Acopladas: STAD, STAI y Petlyuk.
- Comparar la robustez y desempeño de los controladores PI, controladores PII<sup>2</sup> y el controlador IMC, al ser aplicados a las secuencias térmicamente acopladas.

### 1.4 Descripción del contenido

En el Capítulo 2 se revisa la bibliografía en control robusto, presentando las teorías de estabilidad robusta en las que se basa el presente trabajo.

---

---

El Capítulo 3 presenta varios casos de estudio para los cuales se analizó el margen de robustez en función de los parámetros de los controladores PI y PID. Además se presenta y prueba un algoritmo de sintonización robusta de dichos controladores.

En el Capítulo 4 se estudia la robustez del controlador  $PII^2$  en función de sus parámetros de sintonización. Se comparan los sistemas al emplear controladores PI y PID, sintonizados con ZN y con el algoritmo presentado en el Capítulo 3, y los controladores  $PII^2$  sintonizados optimizando la robustez. Las respuestas se comparan en su desempeño dinámico y en el margen de robustez obtenido.

En el Capítulo 5 se hace el análisis de robustez del controlador IMC, y se presentan las reglas de sintonización robusta de dicho controlador. Se comparan las respuestas de los sistemas empleando controladores PI y PID, sintonizados con ZN y con el algoritmo presentado en el Capítulo 3, además de controladores  $PII^2$  sintonizados en el Capítulo 4, y controladores IMC sintonizados con las reglas propuestas. Se comparan las respuestas dinámicas y el margen de robustez.

En el Capítulo 6 se considera el caso multivariable tomando como casos de estudio las Secuencias de Destilación Térmicamente Acopladas: la Secuencia Directa (STAD), la Secuencia Indirecta (STAI) y la secuencia Petlyuk. A lazo abierto se analiza la controlabilidad empleando la técnica de descomposición en valores singulares. Con los controladores a lazo cerrado se estudia el margen de robustez para los controladores PI,  $PII^2$  e IMC. Se analizan las secuencias en robustez y en desempeño para cada tipo de controlador empleado.

El Capítulo 7 presenta las conclusiones a las que se llegaron con el presente trabajo, y se describen las sugerencias para trabajos futuros.

---

# Capítulo 2

## Antecedentes en Control Robusto

### 2.1 Introducción

En los últimos años se han dado notables desarrollos en el área de control robusto (Barmish, 1994). Sin embargo, y a pesar de los grandes potenciales de aplicación del control robusto, los niveles de abstracción matemática de las teorías que se han desarrollado lo han hecho prácticamente inaccesibles para los ingenieros de procesos (Morari y Zafiriou, 1989). El modelar las incertidumbres de manera estructurada simplifica el problema de control robusto.

Los sistemas con incertidumbre estructurada presentan variaciones en los coeficientes de su ecuación característica, que son función de las incertidumbres presentes. Cada una de las incertidumbres está delimitada entre un valor mínimo y un máximo, por lo que la ecuación característica no será un polinomio sino un número infinito de posibles polinomios. A esta familia de polinomios se le llama *polinomio incierto* ya que su valor dependerá del valor que tomen las incertidumbres. Al ser los coeficientes función del vector incertidumbre ( $\mathbf{q}$ ) el polinomio incierto se representa por:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \quad 2.1$$

Si todos los polinomios que forman parte del polinomio incierto son estables, entonces el polinomio incierto es *robustamente estable*.

## 2.2 Familia de polinomios de intervalo

El polinomio cuyos coeficientes son inciertos, pero independientes unos de otros, tiene una estructura incierta independiente. Como la estructura es independiente, los coeficientes del polinomio incierto, Ecuación 2.1, se pueden expresar en forma de intervalo, teniendo como límite inferior y superior los valores que pueden tomar al incluir las incertidumbres.

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad 2.2$$

donde  $[q_i^-, q_i^+]$  denota el intervalo  $i$ -ésimo componente de incertidumbre  $q_i$ . La familia resultante es una familia de polinomios de intervalo, o simplemente un polinomio de intervalo.

## 2.3 Teorema de Kharitonov

Una familia de polinomios de intervalo (Ecuación 2.2) representa un número infinito de polinomios que forman parte de ella. Parecería imposible el poder determinar la estabilidad de toda la familia; sin embargo, el teorema de Kharitonov (1978) proporciona una manera sencilla de comprobar la estabilidad de toda la familia. Con el teorema de Kharitonov el problema de determinar la estabilidad de un número infinito de polinomios se reduce a determinar la estabilidad de cuatro polinomios claves, con los que se garantiza la estabilidad de la familia completa. Se habla de *estabilidad robusta* cuando toda la familia de polinomios de intervalo es estable.

**Teorema 1 (Kharitonov)** *Una familia de polinomios de intervalo  $P$ , con grado invariante, es robustamente estable si y sólo si sus cuatro polinomios de Kharitonov son estables.*

Los polinomios de Kharitonov, asociados a la familia de polinomios de intervalo son:

$$K_1 = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \quad 2.3a$$

$$K_2 = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots \quad 2.3b$$

$$K_3 = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots \quad 2.3c$$

$$K_4 = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \quad 2.3d$$

Para probar la estabilidad de los polinomios de Kharitonov, es decir, comprobar la estabilidad de la familia se puede emplear el rectángulo de Kharitonov. El rectángulo de Kharitonov representa todo el conjunto de valores que un polinomio de intervalo puede tomar en el plano complejo, para una frecuencia dada. El rectángulo de Kharitonov es el subconjunto del plano complejo dado por  $p(j\omega, Q) = \{p(j\omega, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ , donde  $p(j\omega, Q)$  es un rectángulo cuyos vértices son los cuatro polinomios de Kharitonov a la frecuencia dada  $\omega$ . Se realiza un barrido en la frecuencia, y para cada valor de la frecuencia se calcula y grafica el rectángulo de Kharitonov. Las dimensiones del rectángulo varían con la frecuencia. Se observa si en la gráfica obtenida alguno de los rectángulos de Kharitonov cruza por el origen; de ser así, la familia de intervalo es inestable, y en caso contrario la familia es robustamente estable. El movimiento del rectángulo de Kharitonov es importante, ya que permite establecer un criterio de estabilidad robusta que se conoce como *condición de exclusión del cero* (Kharitonov, 1978).

**Lema 1 (Condición de exclusión del cero)** *Considérese una familia de polinomios de intervalo  $P = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$  con grado invariante, y al menos un miembro estable  $p(s, \mathbf{q}^0)$ . Entonces  $P$  es robustamente estable si y sólo si  $z = 0$  es excluido del rectángulo de Kharitonov para todas las frecuencias no negativas, esto es,  $0 \notin p(j\omega, Q)$  para todas las frecuencias  $\omega \geq 0$ .*

La Figura 2.1 muestra una gráfica del “movimiento típico” del rectángulo de Kharitonov al hacer un barrido en la frecuencia. La familia de polinomios de intervalo graficada es  $p(s, \mathbf{q}) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25]$  y se encuentra reportada en Barmish (1994). El barrido en la frecuencia se realizó entre 0 y 1 (frecuencia de corte). Al observar que ningún rectángulo cruza por el origen, se concluye que el polinomio incierto es robustamente estable.

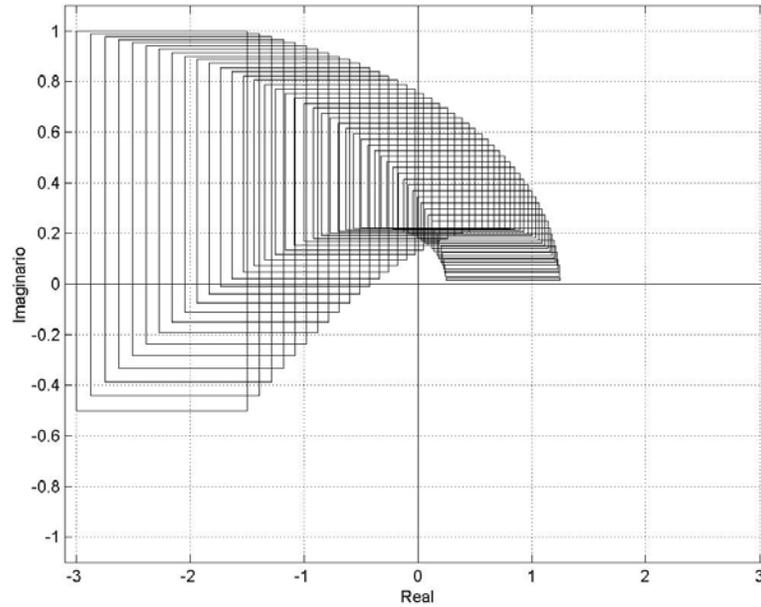


Figura 2.1: Movimiento del rectángulo de Kharitonov

## 2.4 Planta de intervalo con retroalimentación

Una *familia de plantas de intervalo* es un cociente entre dos familias polinomiales de intervalo. La planta es descrita por un polinomio incierto en el numerador, un polinomio incierto en el denominador y sus respectivos conjuntos límites  $Q$  y  $R$  (para los vectores de incertidumbre  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$ , respectivamente).

$$P(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{r})} = \frac{\sum_{i=0}^m q_i s^i}{\sum_{i=0}^n r_i s^i} \quad 2.4$$

Simplificando la notación en forma de intervalo se escribiría

$$P(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i}{\sum_{i=0}^n [r_i^-, r_i^+] s^i} \quad 2.5$$

$P$  también es llamada simplemente *planta de intervalo*, y se utiliza la notación  $P = \{p(\bullet, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbf{q} \in Q ; \mathbf{r} \in R \}$ .

La ecuación característica resultante de la planta de intervalo, para una retroalimentación unitaria es

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i + \sum_{i=0}^n [r_i^-, r_i^+] s^i \quad 2.6$$

Siendo  $n > m$  se tiene

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{i=0}^m [q_i^- + r_i^-, q_i^+ + r_i^+] s^i + \sum_{i=m+1}^n [r_i^-, r_i^+] s^i \quad 2.7$$

Por otro lado si se tiene un compensador no unitario con numerador  $N_C$ , y otro en el denominador  $D_C$ , la ecuación característica resultante es

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \left( \sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i \right) N_C + \left( \sum_{i=0}^n [r_i^-, r_i^+] s^i \right) D_C \quad 2.8$$

## 2.5 Función de Tsytkin-Polyak

El margen de robustez es la máxima variación que presentan las incertidumbres sin que el sistema se vuelva inestable (Barmish, 1994).

Para una familia de polinomios de intervalo robustamente estable, existe la tentación de asociar la distancia del rectángulo de Kharitonov al origen con el margen de robustez. Se cree que mientras  $p(j\omega_0, Q)$  permanezca alejado de  $z = 0$  todas las frecuencias  $\omega \geq 0$ , existe un margen de robustez significativo, y si  $p(j\omega_0, Q)$  está cerca de cero, para algunas frecuencias, se cree que el margen de robustez es pequeño. El trabajo de Tsytkin y Polyak (1991) demostró que este razonamiento no es válido. No existe una relación directa entre la distancia del rectángulo de Kharitonov al origen con el margen de robustez.

Tsytkin y Polyak (1991) desarrollaron una función que prueba el límite de estabilidad robusta, y permite determinar el margen de robustez de un polinomio nominal.

Un polinomio de intervalo de orden  $n$  puede ser escrito de la siguiente manera

$$p_r(s, \mathbf{q}) = p_0(s) + r \sum_{i=0}^n [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] s^i \quad 2.9$$

donde  $p_0(s)$  es un polinomio nominalmente estable,  $r \geq 0$  representa el límite variable de los componentes del vector incertidumbre,  $\varepsilon_i \geq 0$  son factores de escala que determinan las cotas del conjunto límite  $Q_r$ . Si los factores de escala son iguales a los coeficientes del polinomio nominal, entonces  $r$  representa la fracción en que pueden variarse los coeficientes del polinomio y que la familia resultante siga siendo estable.

La familia de polinomios de intervalo resultante será  $P_r = \{p_r(\bullet, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q_r\}$ . El objetivo es calcular el margen de robustez de sistema nominal.

$$r_{max} = \sup \{r : P_r \text{ es robustamente estable}\} \quad 2.10$$

**Teorema 2 (Tsyppkin-Polyak)** Para un valor de  $r \geq 0$ , considere una familia de polinomios de intervalo  $P_r$ , con orden  $n \geq 2$ , con pesos positivos  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  y  $p_0(s)$  nominalmente estable. Sea

$$G_{TP}(\omega) = \frac{\text{Re } p_0(j\omega)}{\sum_{i \text{ par}} \varepsilon_i \omega^i} + j \frac{\text{Im } p_0(j\omega)}{\sum_{i \text{ impar}} \varepsilon_i \omega^i} \quad 2.11$$

entonces con norma máxima en  $z \in \mathbf{C}$ , se tiene que  $P_r$  es robustamente estable si y sólo si la condición de frecuencia cero  $|p_0(j0)| > r\varepsilon_0$  se satisface, y  $\|G_{TP}\|_\infty > r$  para todas las frecuencias  $\omega \geq 0$ .

En su trabajo de Tsyppkin y Polyak sugieren una manera de visualizar gráficamente el margen de robustez ( $r_{max}$ ). Se genera una gráfica de la función compleja  $G_{TP}(\omega)$ , y se traza un cuadrado con centro en el origen ( $z = 0$ ). Se aumenta el tamaño del cuadrado hasta el momento que toque por primera vez la función; este punto se denomina  $r_{max}^+$ . Tomando en cuenta la condición de frecuencia cero  $r_0 = |p_0(j0)| / \varepsilon_0$ , el margen de robustez se obtiene de  $r_{max} = \min\{r_0, r_{max}^+\}$ .

Como ejemplo de aplicación se encontró el margen de robustez del polinomio nominal  $p_0(s) = s^6 + 15s^5 + 104s^4 + 420s^3 + 1019s^2 + 1365s + 676$ , reportado por Barmish (1994). En este caso se considera los factores de escala igual a los coeficientes del polinomio nominal. Para este caso la función de Tsyppkin-Polyak es la siguiente:

$$G_{TP}(\omega) = \frac{-\omega^6 + 104\omega^4 - 1019\omega^2 + 676}{\omega^6 + 104\omega^4 + 1019\omega^2 + 676} + j \frac{15\omega^5 - 420\omega^3 + 1365\omega}{15\omega^5 + 420\omega^3 + 1365\omega} \quad 2.12$$

Se hace un barrío en la frecuencia para la función  $G_{TP}$ . La Figura 2.2 muestra la función  $G_{TP}$  así como los cuadrados crecientes hasta tocar la función  $G_{TP}$ . En ella se observa que la máxima variación permitida en los coeficientes es de 0.135 (13.5%).

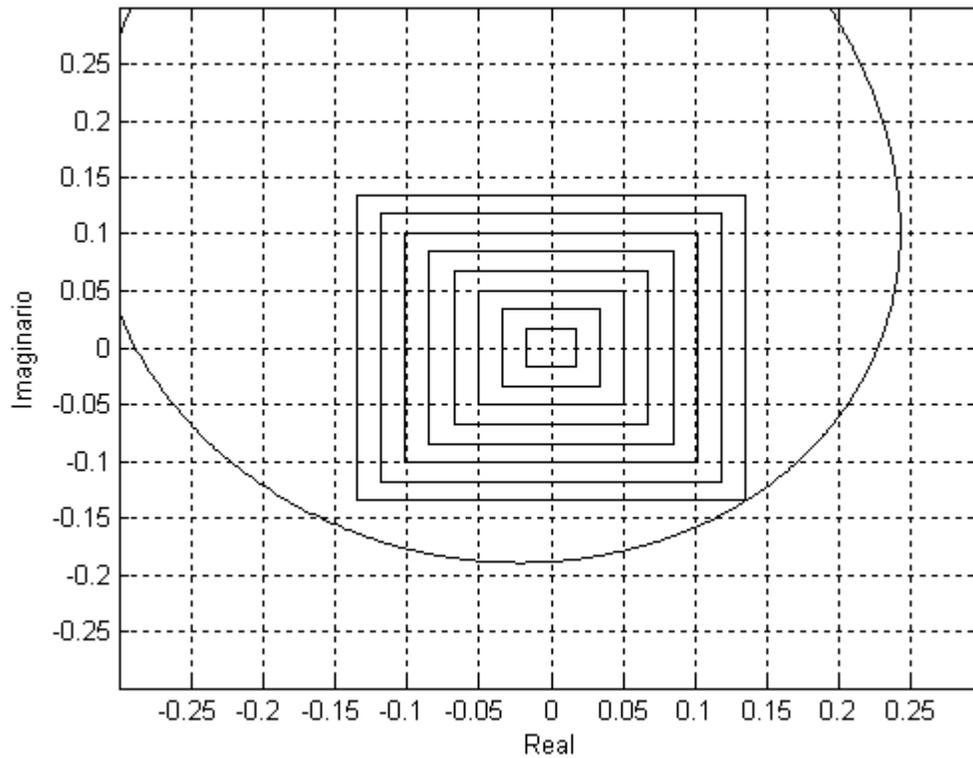


Figura 2.2: Gráfica de la función  $G_{TP}$

## 2.6 Aplicación del margen de robustez

Las propiedades de estabilidad de la respuesta a lazo cerrado, para un sistema de control retroalimentado, está determinado por los polos de la función de transferencia global. Estos polos se obtienen al encontrar las raíces de la ecuación característica.

$$p_o(s) = 1 + G_p G_C G_m G_f \tag{2.13}$$

donde  $G_p$  función de transferencia del proceso

$G_C$  función de transferencia del controlador

$G_m$  función de transferencia del dispositivo de medición

---

$G_f$  función de transferencia del elemento de control final

Para un sistema de control lineal la ecuación característica será un polinomio en  $s$  (en el dominio de Laplace), y a partir de este polinomio es posible calcular el margen de robustez del sistema de control

Empleando el margen de robustez es posible analizar y diseñar sistemas de control. Sin embargo, las únicas aplicaciones del margen de robustez se presentaron en los trabajos de Soto Becerra (1995, 2002). En su tesis de maestría, Soto Becerra (1995) calculó el margen de robustez empleando la ecuación características para un sistema de control de un tanque con calentamiento empleando controladores PI y PID, previamente sintonizados con Ziegler Nichols. La comparación se realizó para los sistemas sintonizados con ZN pero no se estudió el comportamiento de los parámetros de sintonización de los controladores sobre el margen de robustez. En su tesis de Doctorado, Soto Becerra (2002) empleo el margen de robustez comparando diferentes Secuencias Térmicamente Acopladas con retroalimentación de 0.01, para selección del diseño más robusto. En dicho trabajo no se presentó el estudio de robustez para ningún controlador. Existen algunos trabajos en ingeniería química en robustez desde el punto de vista de desempeño dinámico (basta ver el texto de Morari y Zafiriou, 1989); sin embargo, son pocos los trabajos que estudian la estabilidad robusta, siendo la mayoría del área de ingeniería eléctrica. De ahí que el presente trabajo sea un de los primeros, en el área de ingeniería química, que analiza la influencia de los parámetros de los controladores en la robustez de sistemas de control a lazos cerrado.

---

# Capítulo 3

## Robustez en Controladores PI y PID

### 3.1 Introducción

Existen dos tipos de controladores retroalimentados ampliamente utilizados en la industria, el controlador PI y el controlador PID. Estos controladores se han utilizado en la industria de procesos desde los años cuarentas, y se mantienen como los más utilizados hasta nuestros días. Esto es debido a que se conocen bien sus propiedades respecto a la efectividad, simplicidad y condiciones de aplicación. Para procesos de una entrada y una salida (SISO) se han desarrollado varios métodos de sintonización. Para los controladores PI y PID existen métodos de sintonización basados en la estabilidad (Ziegler y Nichols, 1942, Tyreus y Luyben, 1992), métodos basados en el desempeño dinámico (López y col., 1969, Ciacone y Marlin, 1992) y métodos basados en la respuesta deseada a lazo cerrado (Smith y col., 1975). Sin embargo, en ninguna de las diferentes metodologías se utiliza un parámetro numérico para medir la robustez.

El controlador PI tiene 2 parámetros de sintonización, la ganancia proporcional del controlador ( $K_C$ ) y la constante de tiempo integral ( $\tau_I$ ). La acción proporcional facilita un cambio en la salida de controlador que tenderá a ajustar el proceso. La acción integral proporciona, paulatinamente, la acción correctora suplementaria exacta hasta anular la desviación. La constante de tiempo integral, o tiempo de reajuste, se define como el tiempo

que tarda la acción integral en repetir el movimiento de la válvula, debido a la acción proporcional, frente a un cambio escalón en la desviación, si ésta se mantuviera constante. El término integral del controlador PI causa cambios continuos en su salida hasta que el error sea cero. La función de transferencia para el controlador PI es:

$$G_C(s) = K_C \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad 3.1$$

El controlador PID contiene tres parámetros de sintonización: la ganancia proporcional ( $K_C$ ), la constante de tiempo integral ( $\tau_I$ ) y la constante de tiempo derivativo ( $\tau_D$ ). La acción proporcional corrige la posición de la válvula en una cantidad proporcional a la desviación. La acción integral mueve la válvula a una velocidad proporcional a la señal del error o desviación; es de efecto lento y progresivo, pero sigue actuando hasta anular la desviación. La acción derivativa corrige la posición de la válvula en una cantidad proporcional a la velocidad de cambio de la desviación, lo cual produce un efecto anticipativo al tener en cuenta la tendencia de la variable controlada. La función de transferencia del controlador PID es:

$$G_C(s) = K_C \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad 3.2$$

## 3.2 Casos de estudio

Como primer paso se desarrolló un algoritmo, escrito en MATLAB, para determinar numéricamente el margen de robustez empleando la función de Tsytkin-Polyak (1991) presentada en la Sección 2.5. Una vez que se desarrolló la subrutina de cálculo del margen de robustez, se procedió a estudiar el efecto de los parámetros de sintonización en el margen de robustez para los controladores PI y PID en varios casos de estudio.

Para el análisis se seleccionaron varios casos de estudio, lo cuales se presentan en la Figura 3.1. Estos casos se utilizaron para todos los controladores. En el Apéndice A se muestran las ecuaciones características de todos los casos de estudio. El Caso *a* corresponde a un intercambiador de calor presentado por Smith y Corripio (1991). El Caso *b* es un sistema de primer orden con tiempo muerto, además de una función de transferencia en el dispositivo de medición de primer orden con tiempo muerto (Stephanopoulos, 1984). El Caso *c* es un

sistema con respuesta inversa, con un cero en el semiplano derecho, tomado de Stephanopoulos (1984). El Caso *d* es un sistema de primer orden con tiempo muerto; para ver el efecto del tiempo muerto en la robustez, se utilizaron 4 valores diferentes (Luyben, 2001). El Caso *e* es un sistema de segundo orden con tiempo muerto y respuesta inversa; se analizaron 4 valores diferentes del tiempo muerto y 4 valores diferentes de respuesta inversa para estudiar su efecto en la robustez (Luyben, 2000) para un total de 16 posibles combinaciones.

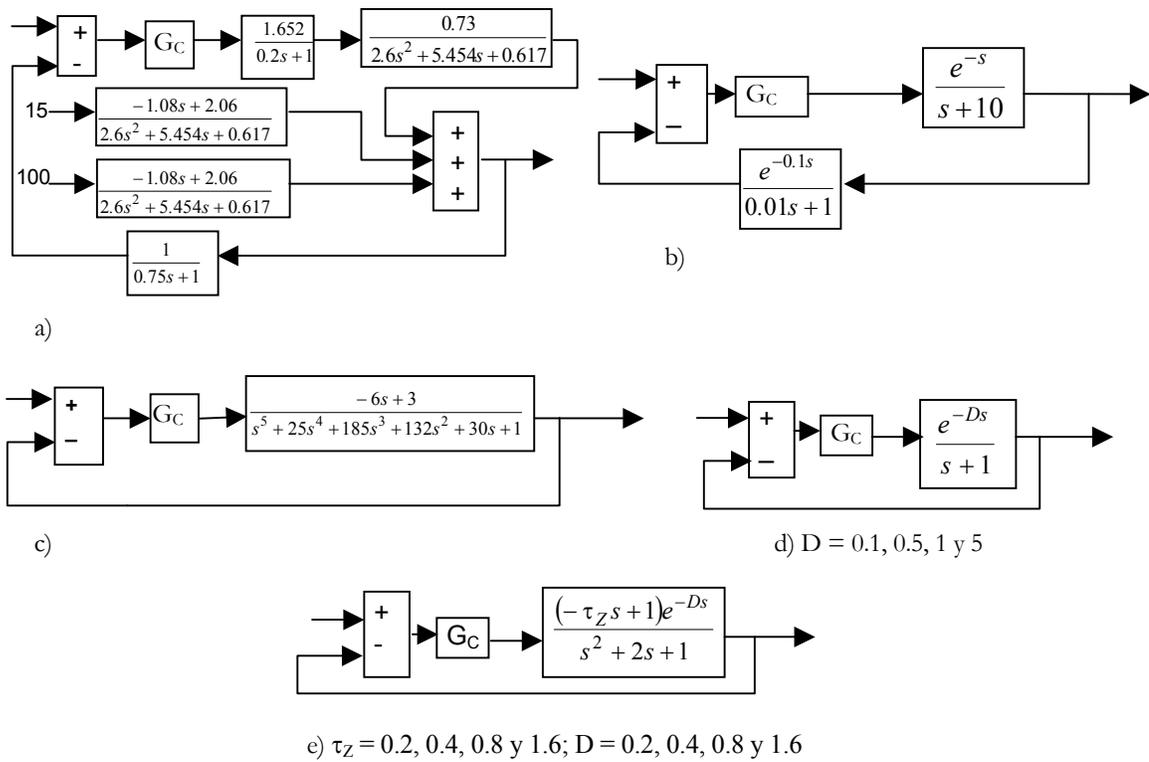


Figura 3.1: Sistemas estudiados

### 3.3 Análisis de robustez

Se analizó el margen de robustez de todos los casos mostrados de la Figura 3.1 para los controladores PI y PID, en función de sus parámetros de sintonización. Para el manejo de los sistemas con tiempos muertos se empleó una aproximación de Padé de segundo orden.

Los resultados obtenidos para el controlador PI muestran que el margen de robustez del sistema aumenta al aumentar  $\tau_I$  y al disminuir  $K_C$ . La Figura 3.2 presenta el comportamiento del margen de robustez para el Caso *a* en función de los parámetros de sintonización del controlador PI. A valores muy pequeños de  $\tau_I$  se obtiene un margen de robustez muy pequeño, pero al aumentar  $\tau_I$  un poco se alcanza un valor mucho mayor que permanece prácticamente constante hasta valores altos de  $\tau_I$ . Por otro lado el margen de robustez disminuye al aumentar  $K_C$ , en todo el rango de valores, hasta obtener sistemas inestables. Esto indica que el margen de robustez es más sensible al parámetro  $K_C$  que al parámetro  $\tau_I$ .

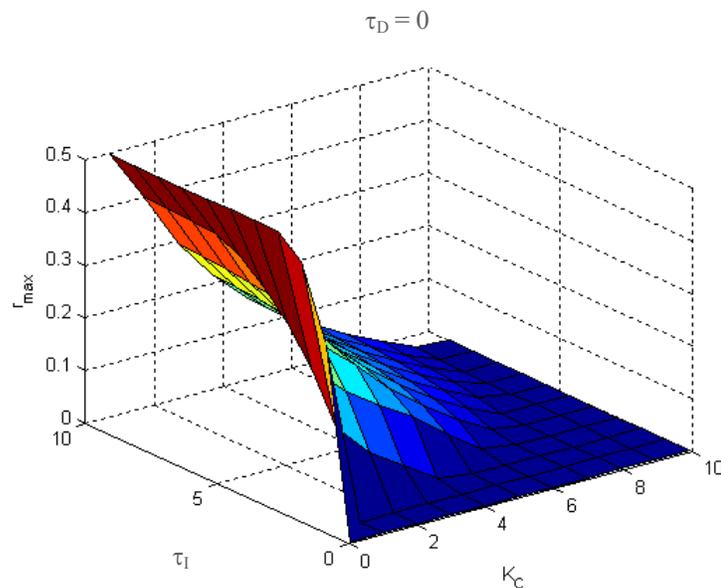


Figura 3.2: Margen de robustez del un controlador PI, para el Caso *a*

El análisis de todos los casos de estudio (Figura 3.1) en función de los parámetros del controlador PI presenta un comportamiento similar al de la Figura 3.2.

El controlador PID contiene tres parámetros de sintonización:  $K_C$ ,  $\tau_D$  y  $\tau_I$ . Para observar la respuesta del margen de robustez, en el análisis se mantiene constante un parámetro y se varían los otros dos.

La Figura 3.3 muestra el comportamiento del margen de robustez al mantener  $\tau_D$  constante y variar  $K_C$  y  $\tau_I$ , en el Caso *a*. Se observa un comportamiento similar al presentado

por los sistemas con el controlador PI. A valores muy pequeños de  $\tau_I$  se obtiene un margen de robustez muy pequeño, pero al aumentar  $\tau_I$  un poco se alcanza un valor mucho mayor que permanece prácticamente constante a pesar de seguir aumentando  $\tau_I$  hasta valores altos. El margen de robustez disminuye al aumentar  $K_C$  en todo el rango de valores hasta obtener sistemas inestables, en donde el margen de robustez es igual a cero. Al comparar la Figura 3.2 con la Figura 3.3, se observa que en el controlador PID existen sistemas estables a valores mayores del parámetro  $K_C$ , indicando que el controlador PID es más robusto que el controlador PI.

Al mantener constante  $\tau_D$ , para el controlador PID, el margen de robustez del sistema aumenta al aumentar  $\tau_I$  y al disminuir  $K_C$ . Este comportamiento se presentó en todos los casos, incluyendo todas las variantes de los casos *d* y *e*.

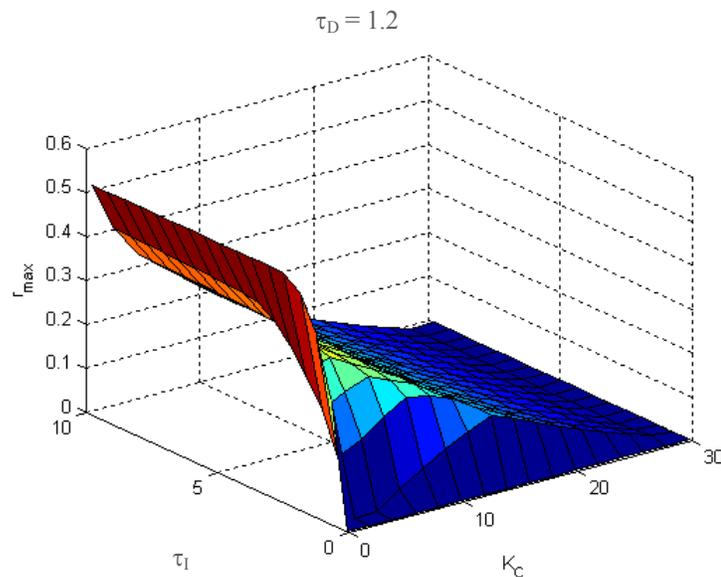


Figura 3.3: Margen de robustez del controlador PID, en el Caso *a* manteniendo  $\tau_D$  constante

La Figura 3.4 muestra el margen de robustez al mantener constante  $K_C$  y variar  $\tau_I$  y  $\tau_D$ , en el Caso *a*. Se presentan máximos en función de  $\tau_D$ . El valor de  $\tau_D$  en el cual se presenta el máximo depende de  $\tau_I$ . Para valores muy pequeños de  $\tau_I$  el máximo se obtiene con valores de

$\tau_D$  grandes, pero al aumentar un poco  $\tau_I$ , el máximo se alcanza a un valor menor de  $\tau_D$ . Después de este punto, el valor de  $\tau_D$  en el cual se presenta el máximo, permanece prácticamente constante al aumentar  $\tau_I$ . Para el Caso *c* se obtiene un comportamiento similar.

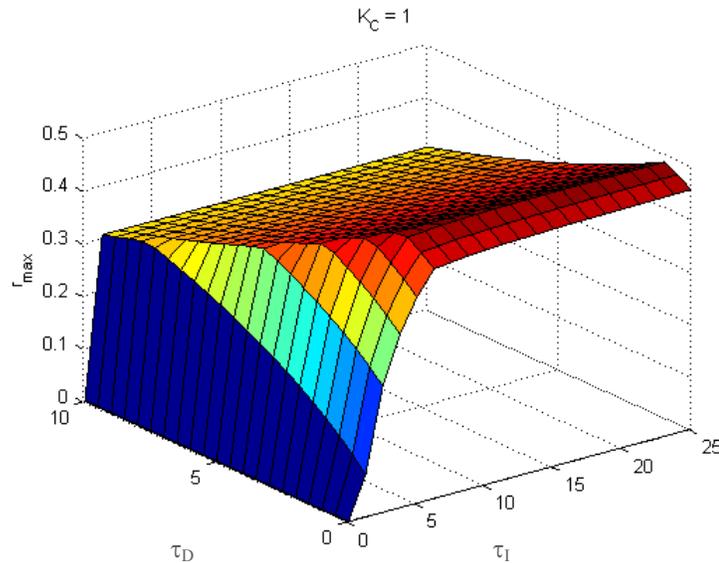


Figura 3.4: Margen de robustez del controlador PID en el Caso *a* manteniendo  $K_C$  constante

En la Figura 3.5 se presenta el margen de robustez para el Caso *a* en función de  $K_C$  y  $\tau_D$ , manteniendo constante  $\tau_I$ . En la figura se observan máximos en el margen de robustez que se presentan en un valor prácticamente constante de  $\tau_D$ , independientemente del valor que tome  $K_C$ . Todos los casos de estudio de la Figura 3.1 presentaron un comportamiento similar.

La Figura 3.6 muestra que para el Caso *b* el máximo para el margen de robustez se obtiene en un valor de  $\tau_D$  igual a cero. Esto indica que, para este caso, el controlador PI es más robusto que el controlador PID. El Caso *b* cuenta con dos tiempos muertos: uno en el proceso y otro en el dispositivo de medición. Debido a los tiempos muertos la acción derivativa del controlador PID desestabiliza este sistema.

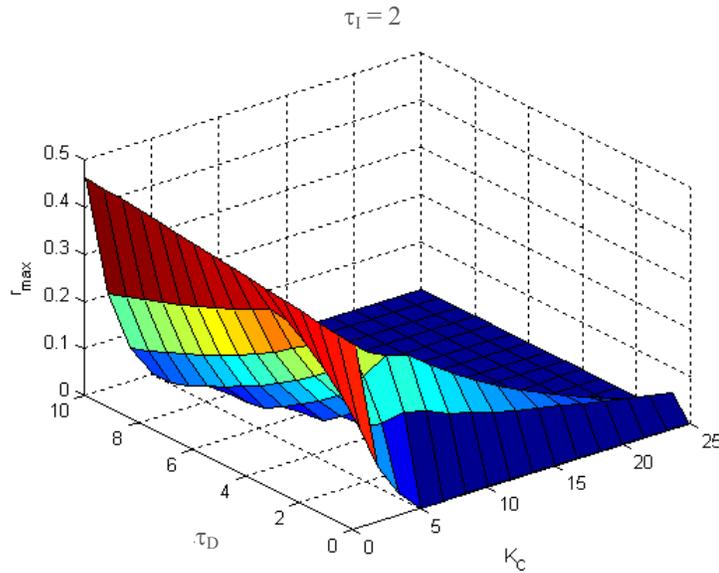


Figura 3.5: Margen de robustez para un controlador PID en el Caso *a* manteniendo  $\tau_I$  constante

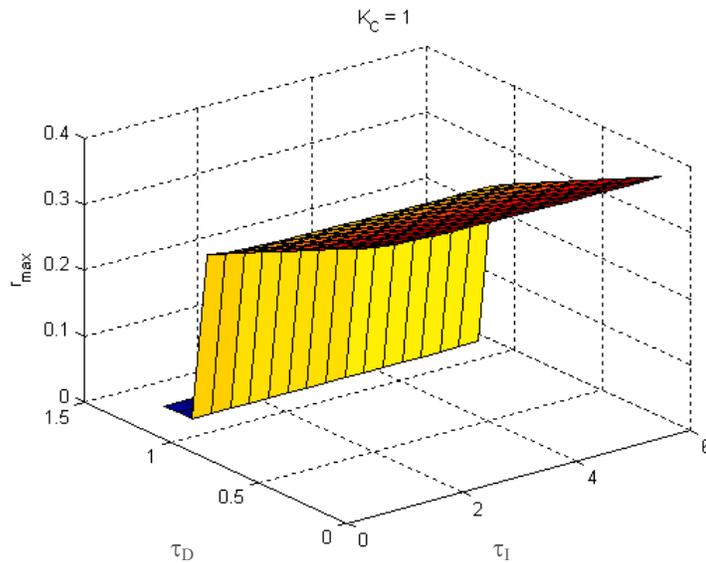


Figura 3.6: Margen de robustez para un controlador PID en el Caso *b* manteniendo  $K_C$  constante

En la Figura 3.7 se muestra el comportamiento del margen de robustez para el Caso *b* al mantener constante  $\tau_I$ , variando los parámetros  $K_C$  y  $\tau_D$ . Puede verse que el máximo margen de robustez se encuentra a valores pequeños de  $K_C$  y  $\tau_D$ . Sin embargo  $\tau_D$  puede tomar

el valor de cero y  $K_C$  no, ya que no habría acción de control. Lo anterior indica que, para este caso, el controlador PI es más robusto que el controlador PID.

El Caso *d* cuenta con cuatro valores para el tiempo muerto ( $D = 0.1, 0.5, 1$  y  $5$ ); para todos ellos el margen de robustez presenta un comportamiento similar al mostrado en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5. Esto es, el margen de robustez es mayor a valores grande de  $\tau_I$ , valores pequeños de  $K_C$ , y en un valor constante de  $\tau_D$  (donde se presenta un máximo). Al aumentar el valor del tiempo muerto ( $D = 0.5, 1$  y  $5$ ), se sigue presentado un máximo en el margen de robustez a valores constantes de  $\tau_D$ , pero entre mayor sea el valor del tiempo muerto menor es el valor de  $\tau_D$  en donde se presenta el máximo.

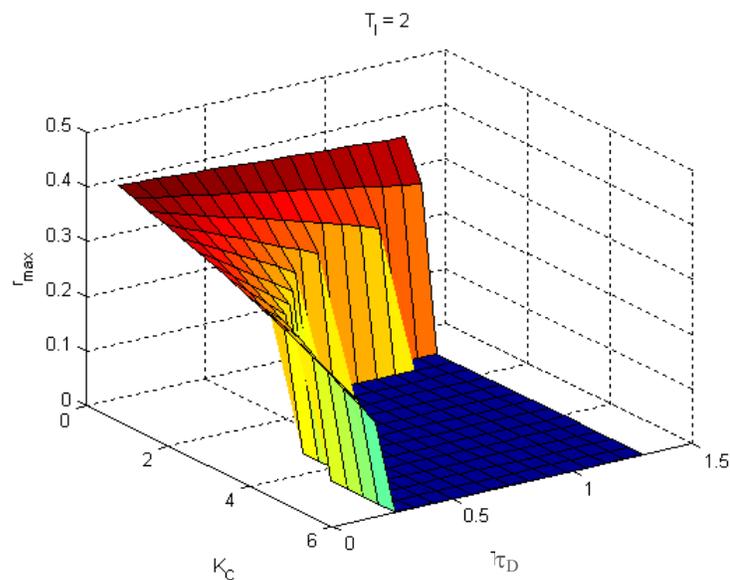


Figura 3.7: Margen de robustez del un controlador PID en el Caso *b* manteniendo  $\tau_I$  constante

Los resultados obtenidos para el Caso *e* indican que tanto la respuesta inversa como el tiempo muerto afectan el valor de  $\tau_D$  en donde se presenta el máximo margen de robustez. Al aumentar el tiempo muerto ( $D = 0.2, 0.4, 0.8$  y  $1.6$ ) el máximo se obtiene para valores de  $\tau_D$  cada vez menores. Al aumentar la respuesta inversa ( $\tau_Z = 0.2, 0.4, 0.8$  y  $1.6$ ) el máximo también se obtiene para valores de  $\tau_D$  cada vez menores. Para el caso extremo analizado,  $D = 1.6$  y  $\tau_Z = 1.6$ , el máximo se obtiene en  $\tau_D$  igual a cero, es decir, el controlador PI es más robusto que el controlador PID.

Los resultados anteriores indican que la acción derivativa del controlador PID desestabiliza los sistemas con tiempo muerto grande y/o respuesta inversa grande, por lo que en estos casos es mejor emplear el controlador PI.

### 3.4 Sintonización de controladores PI y PID

Del análisis realizado en la sección anterior se corroboró que el margen de robustez, para un controlador PI aumenta al aumentar  $\tau_I$  y al disminuir  $K_C$ . En el caso del controlador PID, el margen de robustez aumenta al aumentar  $\tau_I$ , disminuir  $K_C$ , y presentan un máximo para un valor constante de  $\tau_D$ . También se observó que el margen de robustez es más sensible a la ganancia ( $K_C$ ) que a la constante de tiempo integral ( $\tau_I$ ).

Es importante resaltar que al aumentar el margen de robustez el desempeño del sistema se ve afectado, por lo que al sintonizar el sistema de control se debe considerar su desempeño; esto es, debe existir un compromiso entre robustez y desempeño.

A pesar de que para los sistemas de una entrada y una salida (SISO) se han desarrollado varias metodologías de sintonización con los controladores PI y PID, el método de sintonización más popular sigue siendo el de Ziegler-Nichols (1942). Sin embargo empleando la metodología de sintonización de Ziegler-Nichols en sistemas con tiempo muertos pequeños se obtienen respuestas, a cambios escalón en el set point, muy oscilatorias (de bajo amortiguamiento), y en sistemas con tiempos muertos grandes se obtienen respuestas muy lentas, sobre amortiguadas (Luyben, 2000).

La Figura 3.8 muestra el algoritmo de sintonización que se propone en este trabajo para controladores PID donde, a partir de los parámetros sintonizados con la metodología de Ziegler-Nichols (1942), se obtienen sistemas con mayor margen de robustez. Para limitar la robustez del sistema y no provocar un pobre desempeño con respuestas lentas, el margen de robustez se limita hasta obtener un valor del integral del error al cuadrado (ISE por sus siglas en inglés) en la respuesta, para un cambio escalón en el set point, igual al ISE obtenido con la sintonización de Ziegler-Nichols ( $ISE_{ZN}$ ). Cuando el sistema sintonizado con ZN tiene un error muy grande en el algoritmo se limita a una fracción de dicho valor, para lo cual se utiliza un factor  $n$  entre cero y 1. El algoritmo se desarrolló en base al análisis del margen de robustez presentado en la sección anterior.

---

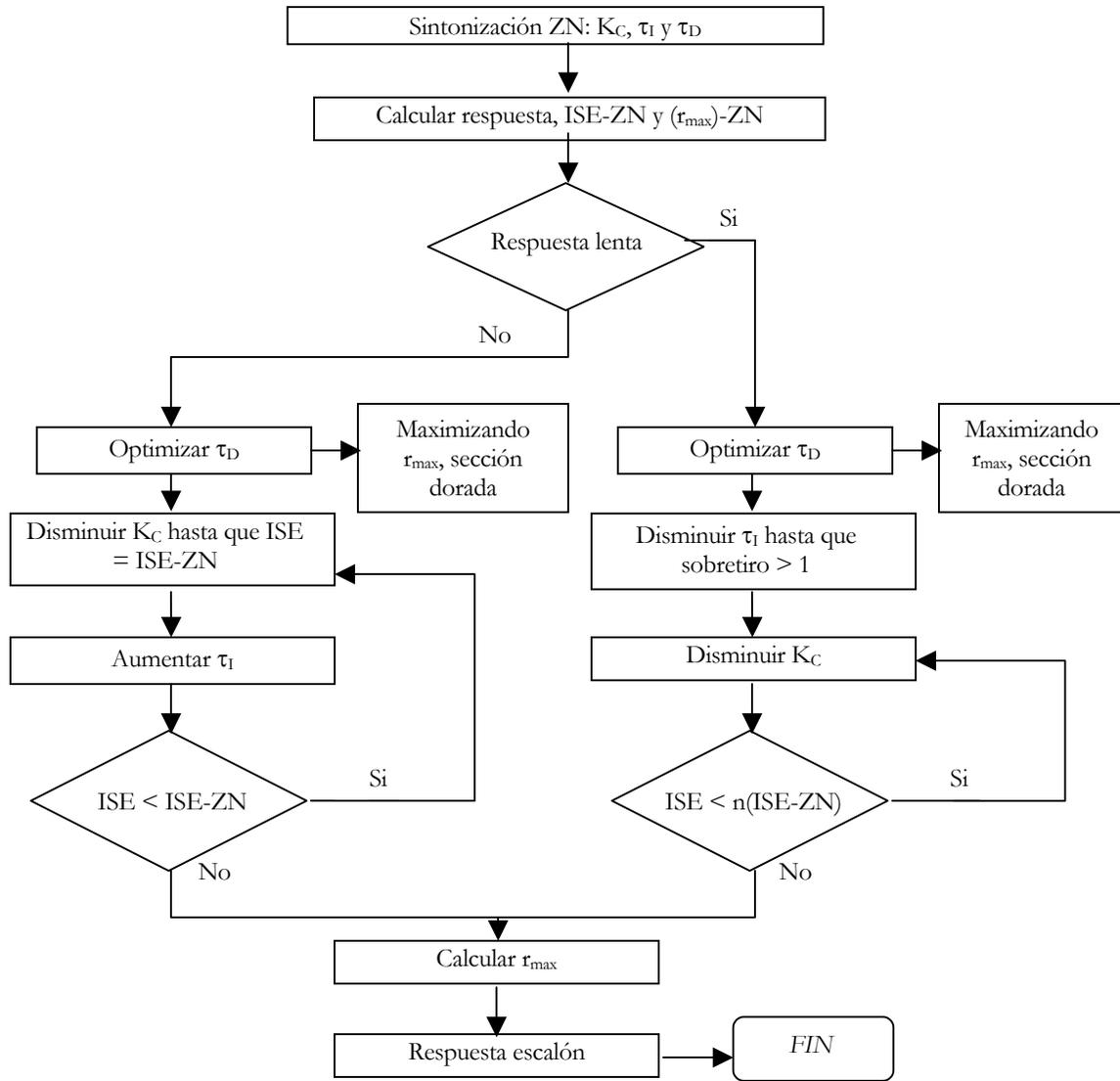


Figura 3.8: Algoritmo de sintonización

En la Figura 3.9 se comparan los resultados del margen de robustez entre la técnica de ZN y el algoritmo de la Figura 3.8 para el controlador PI en todos los casos de estudio. En el Apéndice B se muestran, para todos los casos de estudio, los parámetros sintonizados ( $K_C$  y  $\tau_I$ ), el error que se obtiene para un cambio escalón en el set point y el margen de robustez obtenido con dichos parámetros.

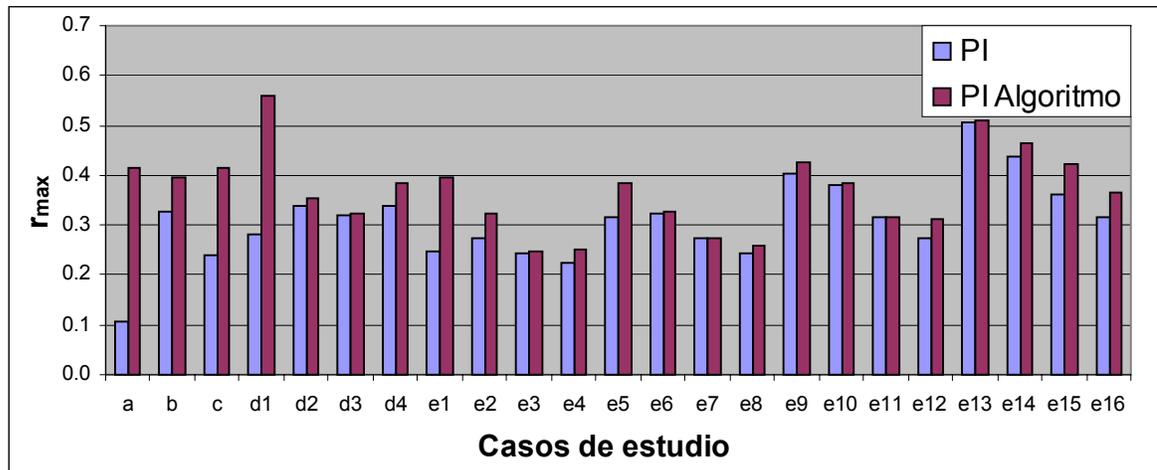


Figura 3.9: Comparación de robustez para el controlador PI

En la Figura 3.9 se puede observar el aumento de robustez que se logra con los sistemas sintonizados con el algoritmo propuesto, en comparación con la robustez de los sistemas con ZN. Además de la robustez, los sistemas sintonizados con el algoritmo presentan un mejor desempeño ya que se obtienen sistemas menos oscilatorios. Sin embargo, en algunos de los casos no existió una mejora significativa en robustez. En esos casos el sistema sintonizado con ZN presenta un buen desempeño dinámico y no es posible aumentar la robustez sin aumentar el error.

La respuesta del Caso *a*, para un cambio escalón unitario en el set point, sintonizado con ambos métodos se presenta en la Figura 3.10. La amplitud de la respuesta se presenta en forma adimensional. Se observa que la respuesta del sistema sintonizado con ZN es muy oscilatoria, en comparación con la respuesta mucho más suave del sistema sintonizado con el algoritmo. Además, la sintonización obtenida con el algoritmo es mucho más robusta, ya que proporciona un margen de robustez del 41%, muy superior al 10% alcanzado con la sintonización de ZN.

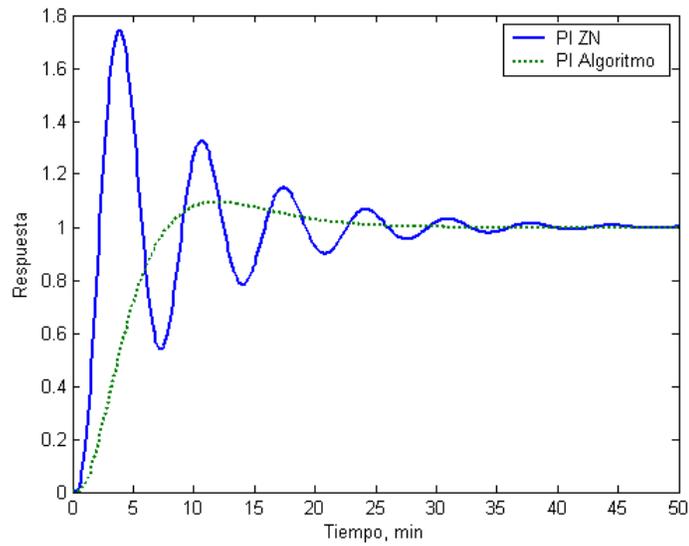


Figura 3.10: Respuesta del Caso *a* para un cambio escalón

La sintonización del Caso *b* con ZN arroja un sistema sobre amortiguado con un margen de robustez alto (32%), pero su respuesta es lenta. El sistema sintonizado con el algoritmo es más robusto (el margen de robustez es 40%), y presenta además una respuesta más rápida (Figura 3.11).

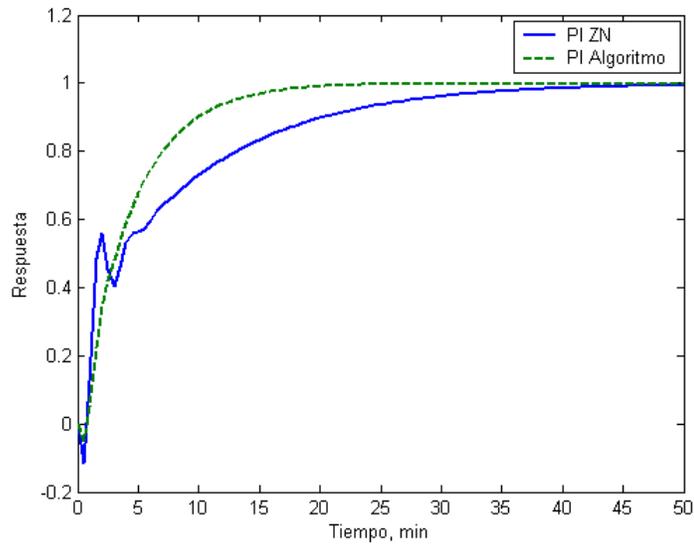


Figura 3.11: Respuesta del Caso *b* para un cambio escalón

En los casos *c* y *d*, la sintonización realizada con el algoritmo proporciona sistemas menos oscilatorios y más robustos a los obtenidos con la sintonización de ZN. Para las diferentes combinaciones del Caso *e* empleando el algoritmo se obtienen sistemas más robustos y con respuestas más rápidas a los obtenidos con ZN, similares a la respuesta del Caso *b* (ver Figura 3.11).

En la Figura 3.12 se resumen los resultados del margen de robustez empleando la técnica de ZN y el algoritmo en todos los casos de estudio para el controlador PID.

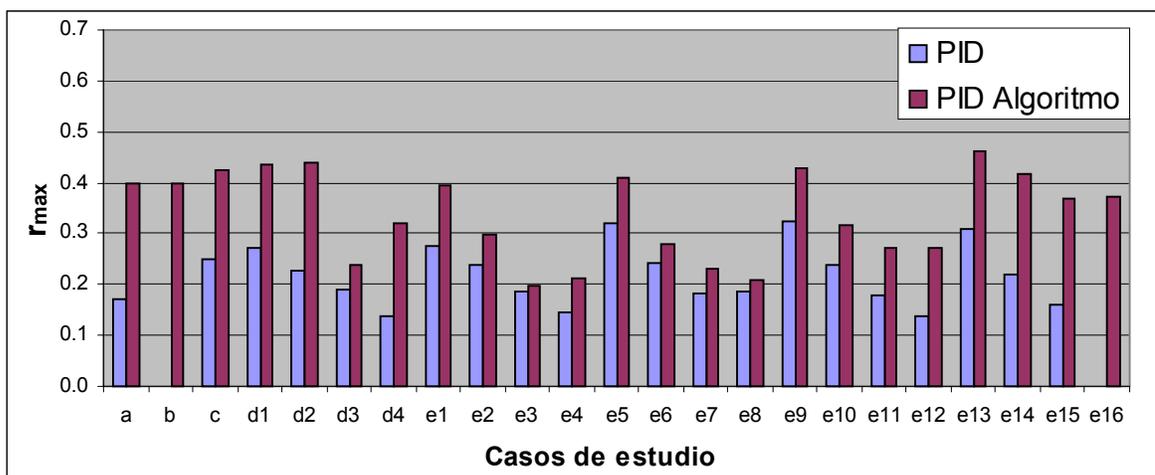


Figura 3.12: Comparación de robustez para el controlador PID

En la Figura 3.12 se puede observar que todos los casos tienen un aumento de robustez con los sistemas sintonizados con el algoritmo propuesto, en comparación con la robustez de los sistemas al ser sintonizados con ZN.

En el Caso *a*, con el algoritmo se mejora considerablemente el margen de robustez (del 17% al 40%). Para el Caso *b* el método de sintonización de Z-N falla, obteniéndose un sistema inestable, mientras que al sintonizarlo con el algoritmo propuesto el óptimo para  $\tau_D$  es cero, indicando que para este caso el controlador PI es más robusto que el controlador PID (con 40% de margen de robustez para el controlador PI). En el Caso *c* el algoritmo aumenta el margen de robustez de manera importante (de 25% a 43%).

La Figura 3.13 muestra la respuesta a un cambio escalón en el set point para el Caso *d*, con  $D = 0.1$ , sintonizado con ambos métodos para el controlador PID. Con el algoritmo se obtienen respuestas más suaves y robusta. Al realizar la sintonización para valores mayores

de tiempo muerto ( $D = 0.5, 1$  y  $5$ ), el parámetro  $K_C$  disminuye y el parámetro  $\tau_I$  aumenta, en ambos métodos. Por otro lado, el parámetro  $\tau_D$  aumenta su valor al sintonizarlo con ZN, y disminuye al sintonizarlo con el algoritmo. Esto provoca que el margen de robustez con el método de ZN disminuya, y el sistema se haga más oscilatorio.

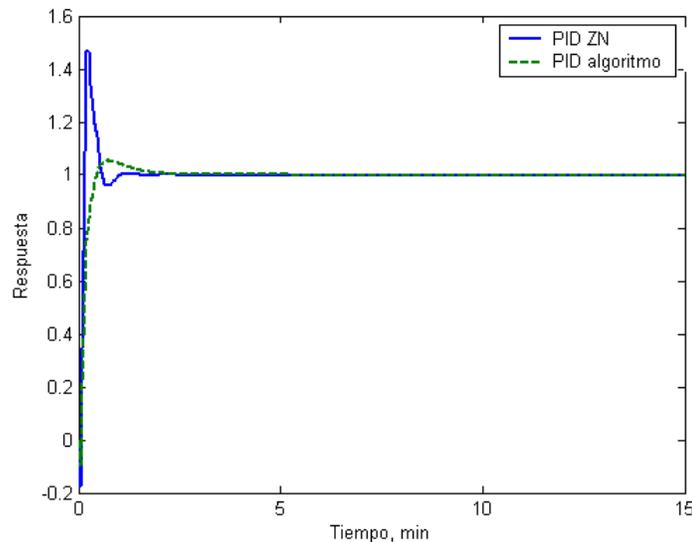


Figura 3.13: Respuesta del Caso  $d$  con  $D = 0.1$

En el Caso  $e$  se puede observar que al aumentar el tiempo muerto y la respuesta inversa el valor óptimo del margen de robustez se encuentra a valores menores de  $\tau_D$ , contrario a lo que produce el método de ZN. La Figura 3.14 muestra que sistema sintonizado con el algoritmo cuenta con una mejor respuesta dinámica.

Al hacer la sintonización mediante ZN, en los casos con la respuesta inversa mayor ( $\tau_Z = 1.6$ ) y  $D = 0.2, 0.4$  y  $0.8$ , se obtienen respuestas muy lentas y oscilatorias. El sistema sintonizado con el algoritmo aumenta la robustez y a la vez acelera la respuesta a lazo cerrado. La Figura 3.15 muestra la mejoría en la respuesta a lazo cerrado, tanto en estabilidad como en velocidad de respuesta.

El método de sintonización de ZN para el Caso  $e$ , con  $\tau_Z = 1.6$  y  $D = 1.6$ , falla al obtenerse un sistema inestable. El algoritmo indica que, en este caso, el controlador PI es más robusto que el PID.

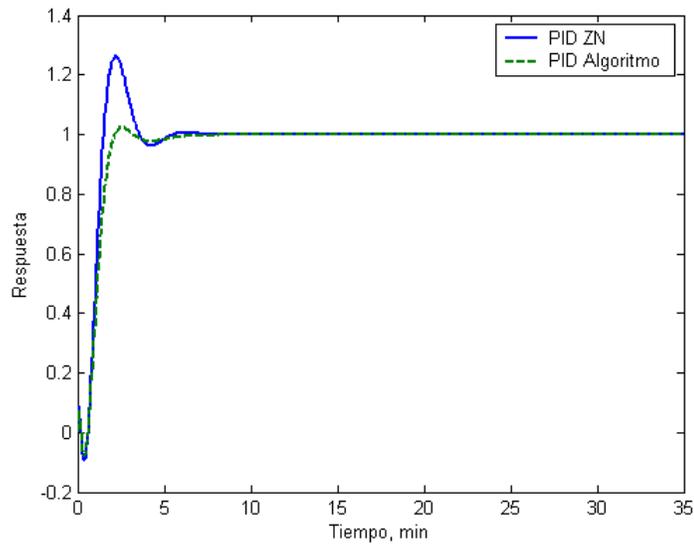


Figura 3.14: Respuesta del Caso  $e$  con  $D = 0.4$  y  $\tau_z = 0.2$

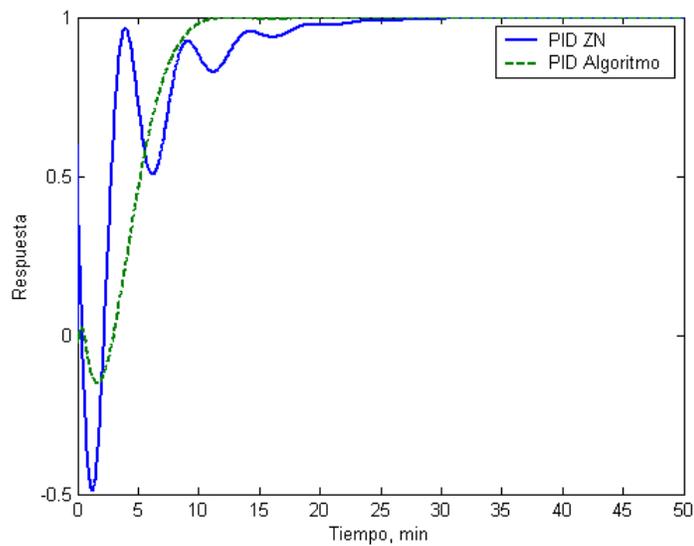


Figura 3.15: Respuesta del Caso  $e$  con  $D = 0.8$  y  $\tau_z = 1.6$

### 3.5 Conclusiones

El presente capítulo presentó el estudio de robustez para los controladores PI y PID. De acuerdo al análisis realizado se observó que el margen de robustez, para un controlador PI o PID, aumenta al aumentar  $\tau_1$  y al disminuir  $K_C$ , comportamiento que era esperado. Además el

---

margen de robustez es más sensible a la ganancia ( $K_C$ ) que a la constante de tiempo integral ( $\tau_I$ ). El controlador PID presenta un máximo en el margen de robustez para un valor fijo del parámetro  $\tau_D$ , independiente de los valores de  $K_C$  o  $\tau_I$ .

A partir de los resultados del análisis se elaboró un algoritmo de sintonización robusta (Figura 3.8). En todos los casos de estudio las respuestas de los sistemas sintonizados con el algoritmo propuesto fueron más robustas y con mejor desempeño dinámico a las respuestas obtenidas de los sistemas sintonizados con ZN para el controlador PID; mientras que con el controlador PI algunos sistemas sintonizados con ZN fueron lo suficiente robustos para el valor del ISE obtenido y no era posible aumentar la robustez sin aumentar el error. El aumento promedio del margen de robustez, en diferencia, fue de 6% para el controlador PI, y 14% para el controlador PID.

En los resultados obtenidos se observó que la constante de tiempo derivativo ( $\tau_D$ ) desestabiliza los sistemas con tiempo muerto o respuesta inversa muy grande, en cuyo caso el controlador PI es más robusto que el controlador PID.

---

# Capítulo 4

## Robustez en Controladores PII<sup>2</sup>

### 4.1 Introducción

La dinámica de varios procesos químicos puede ser representada, para propósitos de sintonización, por un proceso de primer orden con tiempo muerto. En la literatura se reportan varios procesos cuya dinámica se modela como de primer orden; por ejemplo, Skogestad y Morari (1988) modelaron una torre de destilación, Álvarez-Ramírez y col. (1997b) modelaron un intercambiador de calor, y Luyben (1990) modeló un reactor continuo de tanque agitado. La función de transferencia del proceso de primer orden con tiempo muerto contiene tres parámetros: la ganancia del proceso ( $K_P$ ), la constante de tiempo del proceso a lazo abierto ( $\tau$ ) y el tiempo muerto ( $D$ ).

$$G(s) = \frac{K_P e^{-Ds}}{\tau s + 1} \quad 4.1$$

La robustez de sistemas bajo la acción de un controlador retroalimentado PI se debe a la capacidad de la acción integral de estimar perturbaciones en la carga. El parámetro integral se convierte en un estimador de incertidumbres y perturbaciones en la carga a bajas frecuencias, por lo que el offset en estado estable es eliminado.

Alvarez-Ramirez y col. (1997a) derivaron un controlador basados en el controlador PI con capacidades extendidas para estimar perturbaciones dinámicas, denominado PII<sup>2</sup>. La idea

principal es interpretar las perturbaciones como un estado externo, cuya dinámica puede ser reconstruida por la medición en la salida.

El controlador PII<sup>2</sup> está compuesto de tres partes: i) una retroalimentación proporcional, ii) una acción integral y iii) una acción integral de segundo orden. La función de transferencia de dicho controlador es:

$$C(s) = K_C \left[ 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{K_e}{s(s + g_1)} \right] \quad 4.2$$

donde

$$K_C = \frac{-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_C}\right)}{K_P} \quad 4.3$$

$$\frac{1}{\tau_I} = \frac{-g_2}{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_C}\right)} \quad 4.4$$

$$K_e = \frac{-g_2 \left(g_1 - \frac{1}{\tau_C}\right)}{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_C}\right)} \quad 4.5$$

En estas expresiones,  $g_1$  y  $g_2$  son las ganancias del estimador de incertidumbres,  $g_1 = 2L$  y  $g_2 = L^2$ .  $L$  es la tasa del estimador de incertidumbre/perturbación. Por lo tanto, el controlador sólo cuenta con dos parámetros a sintonizar:  $L$  y  $\tau_C$ . En el artículo de Alvarez-Ramírez y col. (1997a) se propone un valor de la constante de tiempo a lazo cerrado,  $\tau_C$ , de  $0.75\tau$ . Esto implica que el sistema nominal a lazo cerrado es más rápido que el sistema a lazo abierto. El valor que proponen para la tasa de estimación de incertidumbres,  $L$ , es  $1/\tau$ . Si  $L$  es igual a  $1/2\tau_C$  el controlador PII<sup>2</sup> se convierte en un controlador PI convencional, ya que el parámetro  $K_e$  valdría cero.

En el presente trabajo se analizó el margen de robustez para diferentes tipos de sistemas variando los parámetros del controlador PII<sup>2</sup>. Una vez realizado el análisis se plantearon estrategias de sintonización para este tipo de controlador. Los resultados que se obtuvieron se compararon los controladores presentados en el capítulo anterior.

## 4.2 Análisis de robustez

El análisis del margen de robustez para el controlador PII<sup>2</sup> se realizó para todos los casos de la Figura 3.1. Como primer paso se analizaron los parámetros globales de la Ecuación 4.2 ( $K_C$ ,  $\tau_I$  y  $K_e$ ) para estudiar el efecto del doble integral en la robustez. Uno de los parámetros se mantuvo constante mientras se variaban los otros dos.

La Figura 4.1 muestra el comportamiento del margen de robustez al variar  $\tau_I$  y  $K_e$  con  $K_C$  constante para el Caso *a*. Se observa que el margen de robustez aumenta a valores mayores de  $\tau_I$ , mientras que disminuye al aumentar el valor de  $K_e$ . Es interesante hacer notar que el parámetro  $K_e$  provoca que el sistema de control disminuya su robustez.

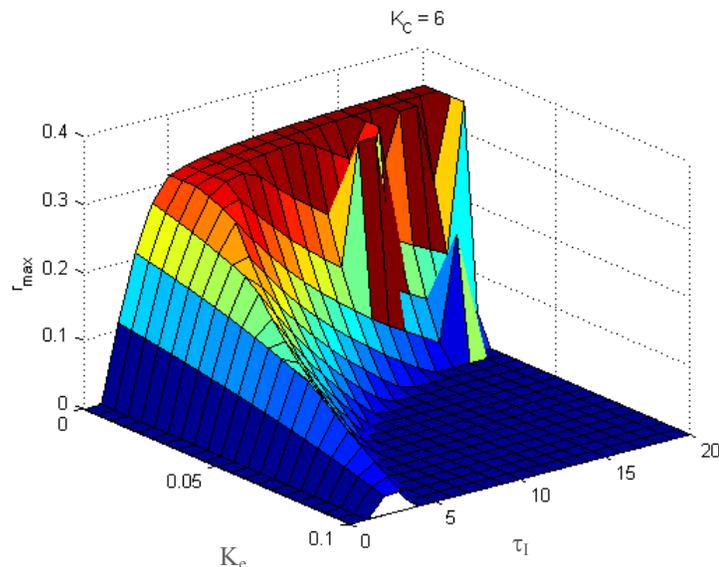


Figura 4.1: Análisis de robustez del controlador PII<sup>2</sup> en el Caso *a* con  $K_C$  constante

En la Figura 4.2 se grafica el margen de robustez para el Caso *b* al variar  $\tau_I$  y  $K_e$  al mantener constante  $K_C$ . Se observa que, al igual que en el caso anterior, el margen de robustez aumenta a valores mayores de  $\tau_I$ , mientras que disminuye al aumentar el valor de  $K_e$ . Este comportamiento es similar en todos los casos de estudio, el parámetro  $K_e$  ocasiona que el sistema disminuya su robustez.

La Figura 4.3 presenta el comportamiento del margen de robustez para el Caso *a* al variar  $K_C$  y  $K_e$  con  $\tau_I$  constante. Se observa que la región del máximo margen de robustez se

presenta en valores pequeños de  $K_C$  y de  $K_e$ . Lo anterior indica que el margen de robustez se ve afectado por  $K_e$ .

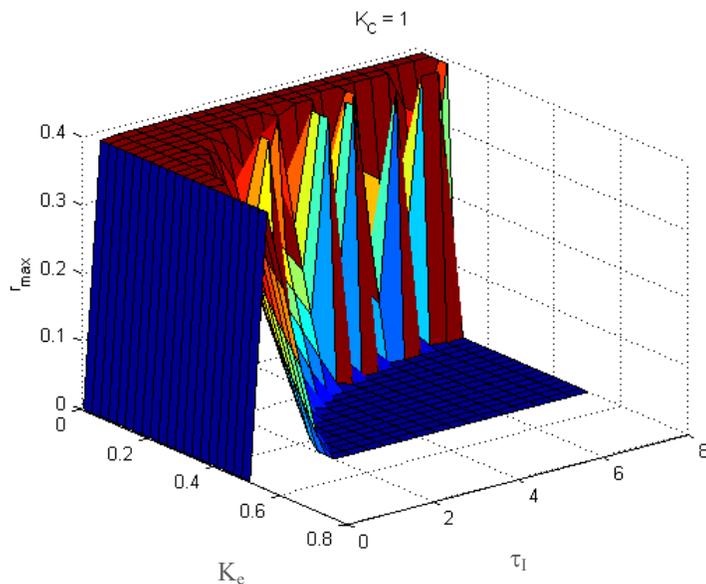


Figura 4.2: Análisis de robustez del controlador PII<sup>2</sup> en el Caso *b* con  $K_C$  constante

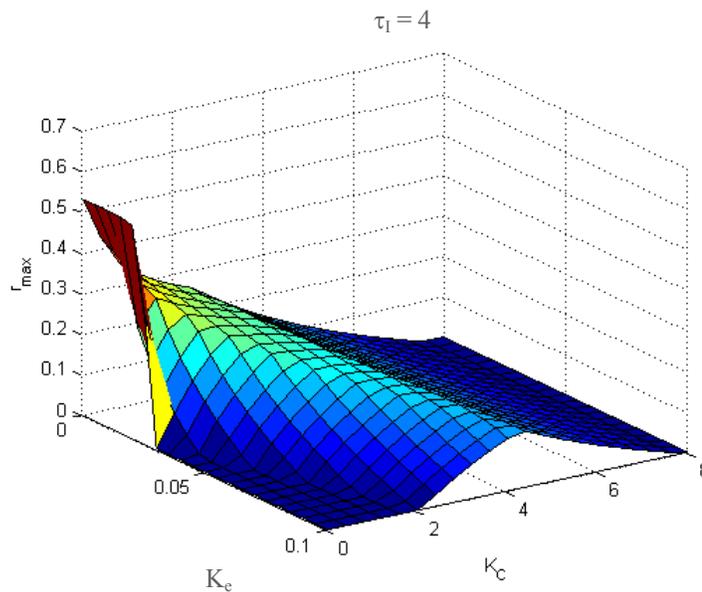


Figura 4.3: Análisis de robustez del controlador PII<sup>2</sup> en el Caso *a* con  $\tau_I$  constante

El comportamiento del margen de robustez para el Caso *b*, al variar  $K_C$  y  $K_e$  con  $\tau_I$  constante, se reporta en la Figura 4.4. Se observa que el margen de robustez presenta un máximo en un valor bajo de  $K_C$  y comienza a disminuir al ir aumentando  $K_C$ . La robustez permanece prácticamente constante en valores pequeños de  $K_e$ , pero al aumentar  $K_e$  la robustez comienza a disminuir.

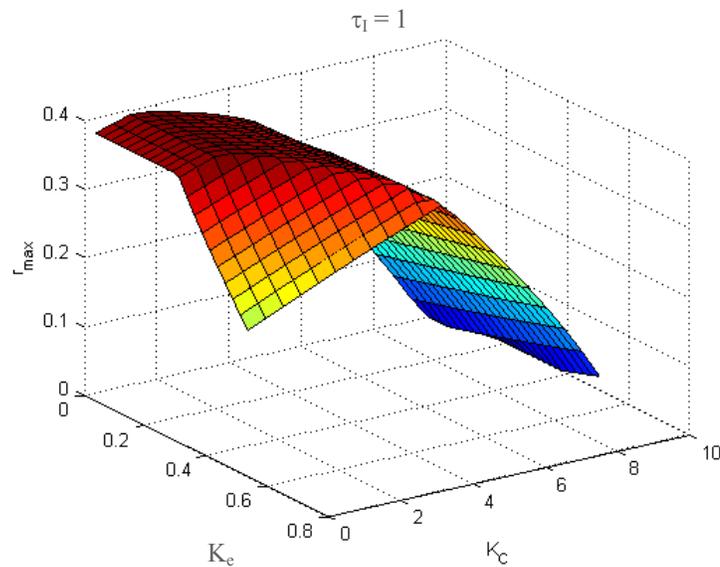


Figura 4.4: Análisis de robustez del controlador PII<sup>2</sup> en el Caso *b* con  $\tau_I$  constante

Del análisis de las figuras 4.1 a 4.4, en donde se estudiaron los parámetros globales del controlador PII<sup>2</sup>, se puede concluir que el parámetro  $K_e$  no mejora la robustez del sistema de control.

Como se había mencionado anteriormente, los parámetros globales del controlador,  $K_C$ ,  $\tau_I$  y  $K_e$ , son función de sólo dos parámetros de sintonización  $L$  y  $\tau_C$  (ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5). Por lo tanto, el siguiente paso fue analizar el comportamiento del margen de robustez en función de esos dos parámetros de sintonización ( $L$  y  $\tau_C$ ).

En la Figura 4.5 se graficó el margen de robustez, variando los parámetros  $L$  y  $\tau_C$ , para el Caso *d* con  $D = 0.1$ . Se observa que existe una pequeña región en donde los parámetros proporcionan sistemas estables. En esta pequeña región se presenta una franja con un máximo para el margen de robustez dependiente de  $L$  y  $\tau_C$ .

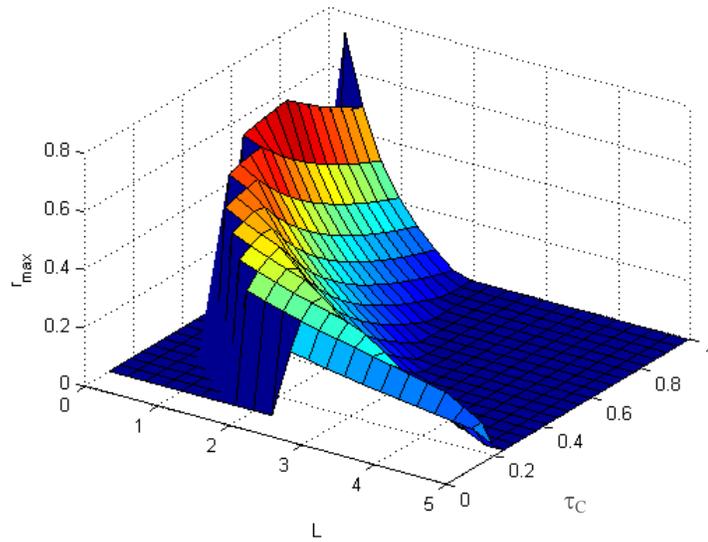


Figura 4.5: Robustez del controlador PII<sup>2</sup> para el Caso *d* con  $D = 0.1$

En la Figura 4.6 se presenta el Caso *e* con  $\tau_z = 0.2$  y  $D = 0.2$ . Se observa, como en la Figura 4.5, que sólo en una pequeña región existen sistemas estables; además, existe una franja de valores donde se presenta una máxima para el margen de robustez. Todos los casos de estudio presentaron el mismo comportamiento.

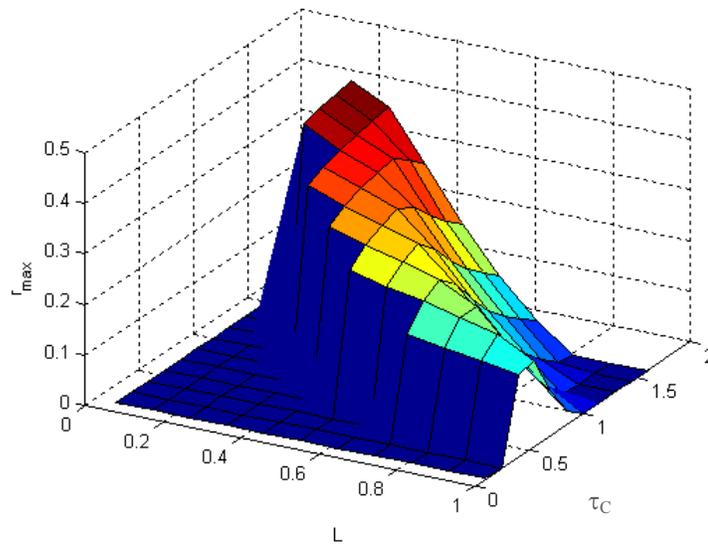


Figura 4.6: Robustez del controlador PII<sup>2</sup> para el Caso *e* con  $\tau_z = 0.2$  y  $D = 0.2$

En todos los casos existe una pequeña región donde los parámetros,  $L$  y  $\tau_C$ , proporcionan sistemas estables. La Figura 4.7 muestra la integral del error al cuadrado (ISE) para el Caso  $d$  con  $D = 0.1$  que se obtiene en la respuesta a lazo cerrado, para un cambio escalón unitario, en cada conjunto de valores para los parámetros  $L$  y  $\tau_C$ . Debido a que existe una pequeña región donde los parámetros proporcionan sistemas estables, existe un pequeño rango de valores de los parámetros en donde el error es pequeño.

Por lo anterior, el margen de robustez y el error del sistema son muy sensibles a los parámetros del controlador  $PII^2$ ,  $L$  y  $\tau_C$ , por lo que parece necesario realizar una sintonización muy precisa de dichos parámetros.

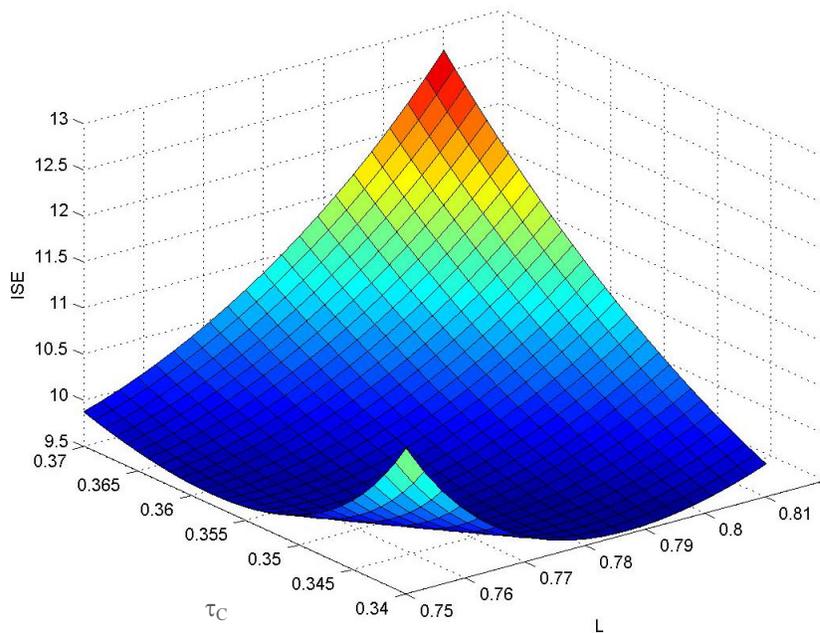


Figura 4.7: Error a lazo cerrado para el Caso  $d$  con  $D = 0.1$

### 4.3 Robustez en la Sintonización del Controlador $PII^2$

El primer paso para sintonizar el controlador  $PII^2$  consistió en sintonizar cada uno de los caso de estudio con Ziegler Nichols; como límite superior de referencia para el error se tomará el valor del integral del error al cuadrado (ISE) al hacer un cambio escalón en el set point. Se buscan los rangos de los parámetros  $L$  y  $\tau_C$  en los que se obtendrían errores menores

al límite superior  $ISE_{ZN}$ . Este conjunto de valores se optimizan para obtener el mayor margen de robustez, asegurando un valor del error igual o menor al  $ISE_{ZN}$ . El diagrama de flujo de este procedimiento se presenta en la Figura 4.8.

Los resultados del margen de robustez para el controlador PII<sup>2</sup> con la metodología propuesta se resumen en la Figura 4.9. Además, los resultados se comparan con el controlador PII<sup>2</sup> sintonizado siguiendo las recomendaciones de Alvarez-Ramírez y col. (1997a), también con los controladores PI y PID sintonizados con Ziegler Nichols y con el algoritmo presentado en el Capítulo 3.

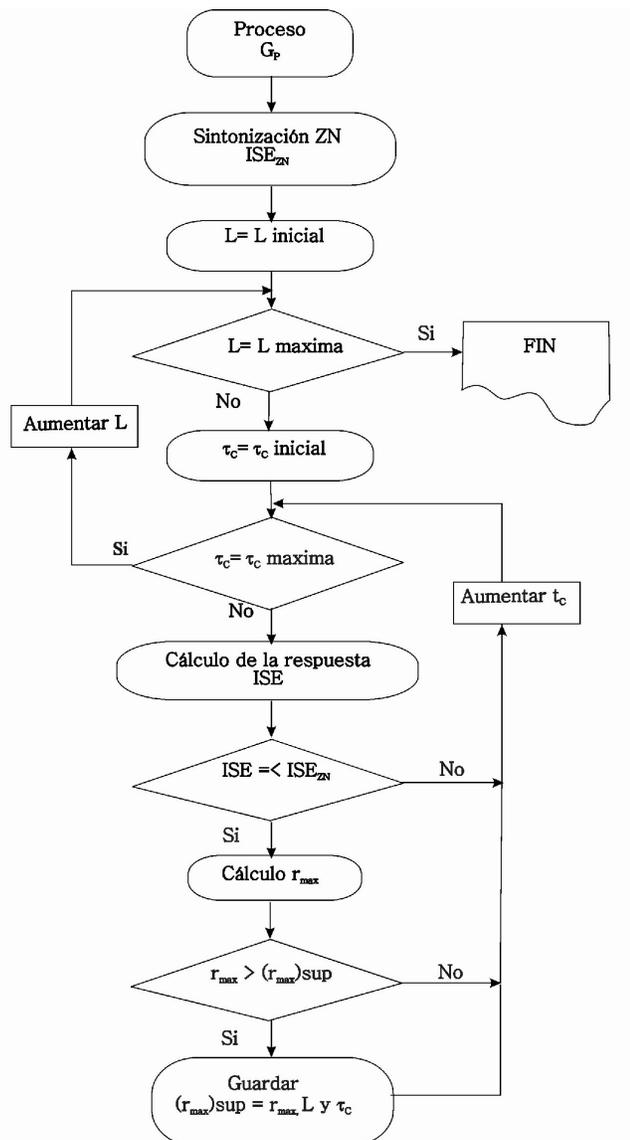


Figura 4.8: Diagrama de flujo para la Sintonización del Controlador PII<sup>2</sup>

El promedio del margen de robustez al considerar todos los casos de estudio fue de 31% para el controlador PI sintonizado con ZN, 37% para el controlador PI sintonizado con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3, 20% para el controlador PID con ZN, 34% para el controlador PID con el algoritmo propuesto, 26% para el controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con el algoritmo de la Figura 4.8, y 13% para el controlador PII<sup>2</sup> sintonizado de acuerdo a Alvarez-Ramírez y col. Con la propuesta de sintonización de Alvarez-Ramírez y col. (AR) para el controlador PII<sup>2</sup> se obtuvo la menor robustez debido a que en la sintonización no se toman en cuenta los tiempos muertos, provocando que en varios de los casos no se obtuvieran sistemas estables. Al aplicar el algoritmo propuesto en la Figura 4.8 en el controlador PII<sup>2</sup> todos los sistemas mejoraron su robustez. Sin embargo, y a pesar de optimizar el margen de robustez, el controlador PII<sup>2</sup> presentó un promedio de robustez menor a los controladores PI (sintonizado con ambos métodos) y PID sintonizado con el algoritmo del Capítulo 3. Solamente el controlador PID sintonizado con ZN tuvo un promedio de robustez menor al controlador PII<sup>2</sup>, y esto se debe a que en dos de los casos de estudio no se obtuvieron sistemas estables con dicho método.

La Figura 4.10 muestra la respuesta del Caso *a* para los controladores PI y PID sintonizados con Ziegler Nichols y con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3, además del controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con AR y con la Figura 4.8. Se puede observar que los sistemas PI y PID sintonizados con ZN presentan las mayores oscilaciones. Los sistemas PI y PID sintonizados con el algoritmo propuesto tienen una respuesta más suave con un sobretiro pequeño. La respuesta del controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con AR es la más lenta en alcanzar el set point, y presenta algunas oscilaciones. El controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con el algoritmo propuesto presenta la respuesta más suave sin sobretiro. Esto indica que la mejor respuesta dinámica se obtiene con el controlador PII<sup>2</sup> con el algoritmo propuesto, seguido de los controladores PI y PID sintonizados con el algoritmo; los peores desempeños dinámicos los presentaron los controladores PI y PID sintonizados con ZN, y el controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con AR.

---

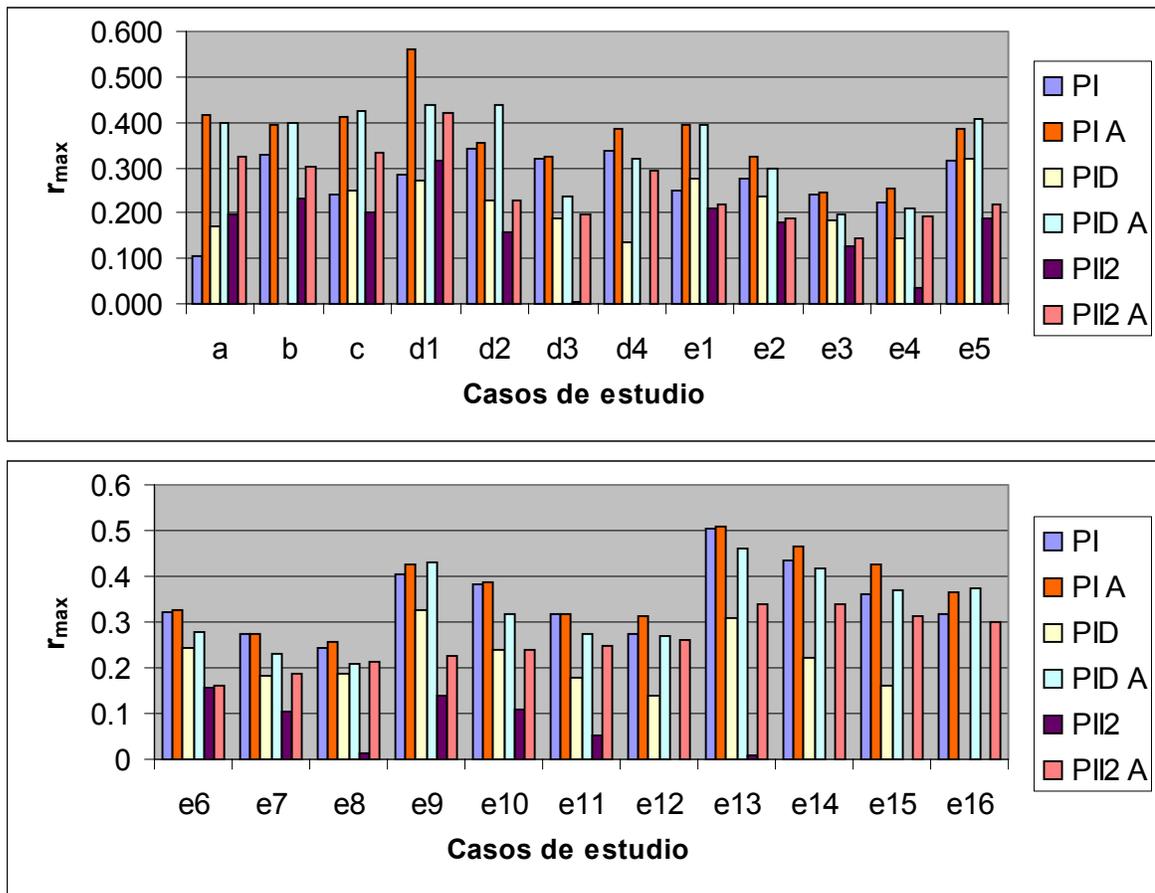


Figura 4.9: Comparación del margen de robustez

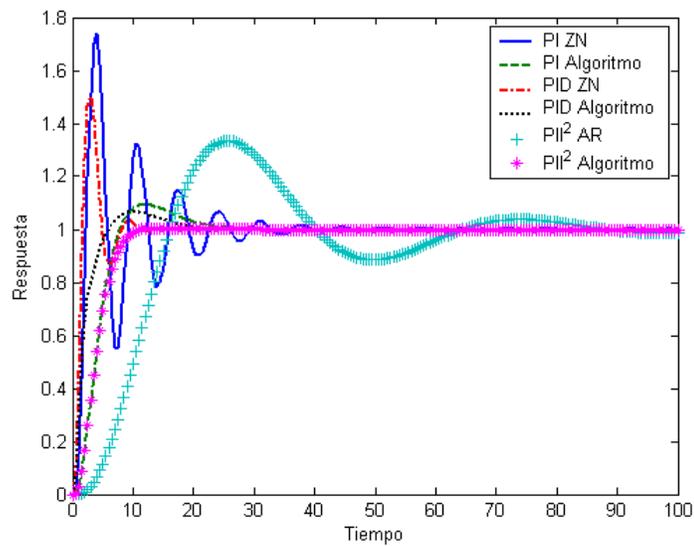


Figura 4.10: Respuesta del Caso a para un cambio escalón en el set point

La Figura 4.11 muestra la respuesta del Caso  $d$ , con  $D = 5$ , para los controladores PI y PID sintonizados con Ziegler Nichols y con el algoritmo, además del controlador  $PII^2$  sintonizado con AR y optimizando la robustez. En este caso el método de sintonización AR para el controlador  $PII^2$  falla y proporciona un sistema inestable. El sistema PI con ZN es muy lento y con una respuesta inversa moderada. El sistema PID con ZN es más rápido pero tiene la respuesta inversa más grande y muchas oscilaciones posteriores. Los sistemas PI y PID sintonizados con el algoritmo tienen una respuesta inversa pequeña y alcanzan el set point más rápidamente, siendo más rápido el PID. El sistema  $PII^2$  sintonizado de acuerdo a la Figura 4.8 presenta la respuesta más rápida con un pequeño sobretiro, y una respuesta inversa pequeña.

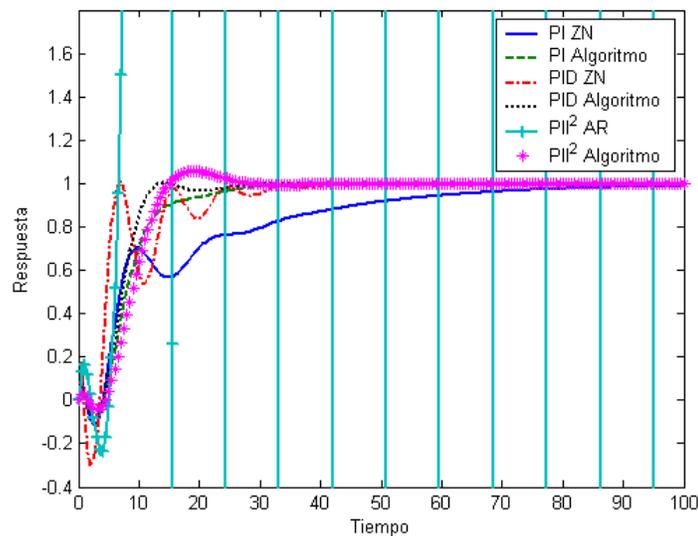


Figura 4.11 Respuesta del Caso  $d$ , con  $D = 5$ , para un cambio escalón en el set point

Las respuestas a lazo cerrado de todos los casos de estudio muestran que el controlador  $PII^2$  (sintonizado con el algoritmo propuesto) tiene un desempeño dinámico superior a los controladores PI y PID sintonizados con ambos métodos. Sin embargo, el margen de robustez (Figura 4.9) se comporta de manera diferente al desempeño dinámico, siendo mayor el margen de robustez que presentaron los controladores PI.

En los capítulos 3 y 4 se ha aplicado el concepto de margen de robustez como método de comparación de diferentes sistemas de control. El controlador  $PII^2$  no resultó ser más robusto que el controlador PI; sin embargo, las respuestas dinámicas a lazo cerrado de los

---

sistemas con controlador PII<sup>2</sup> (sintonizados con el algoritmo propuesto) tienen el mejor comportamiento.

Para ejemplificar el concepto de robustez considérese el Caso *a* cuya respuestas dinámicas para la planta nominal se presentaron en la Figura 4.10. En dicha figura se observa que el mejor comportamiento dinámico lo tuvo el controlador PII<sup>2</sup>. Sin embargo, en la Figura 4.9 puede verse que los máximos márgenes de robustez los presentaron los controladores PI y PID sintonizados con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3. Para el ejercicio propuesto se tomó como base la planta nominal y se hicieron cambios aleatorios en los coeficientes del modelo de 10, 23 y 30%. En la Figura 4.12 se presentan los resultados al utilizar los controladores PI, PID sintonizados con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3 y el controlador PII<sup>2</sup> sintonizado con el algoritmo de la Figura 4.8. La Figura 4.12 a) muestra que la mejor respuesta dinámica en la planta nominal la tiene el controlador PII<sup>2</sup> al ser suave y sin sobretiro. Al hacer cambios del 10% en los coeficientes de la planta (ver Figura 4.12 b) el mejor desempeño dinámico lo tiene el controlador PID, seguido del controlador PII<sup>2</sup>, mientras el controlador PI tiene el peor comportamiento dinámico, con un sobretiro un poco mayor al controlador PII<sup>2</sup>. La Figura 4.12 c) muestra las respuestas dinámicas al hacer cambios del 23% en los coeficientes del modelo. En este caso el mejor desempeño lo presenta el controlador PID, mientras los controladores PI y PII<sup>2</sup> tienen un desempeño similar. En la Figura 4.12 d) se muestran las respuestas al realizar un cambio del 30% en el modelo. En este caso la mejor respuesta la presenta el controlador PID, seguido del controlador PI, y la peor respuesta la tuvo el controlador PII<sup>2</sup> ya que el sistema se desestabiliza. Este resultado corrobora los valores de márgenes de robustez que se habían obtenido para el Caso *a*. Este es sólo un ejemplo de que contar con un buen desempeño dinámico en la planta nominal no implica estabilidad robusta. Es por ello conveniente emplear el margen de robustez como parámetro de comparación e incluirlo en un método de sintonización como el que se propone en este trabajo.

---

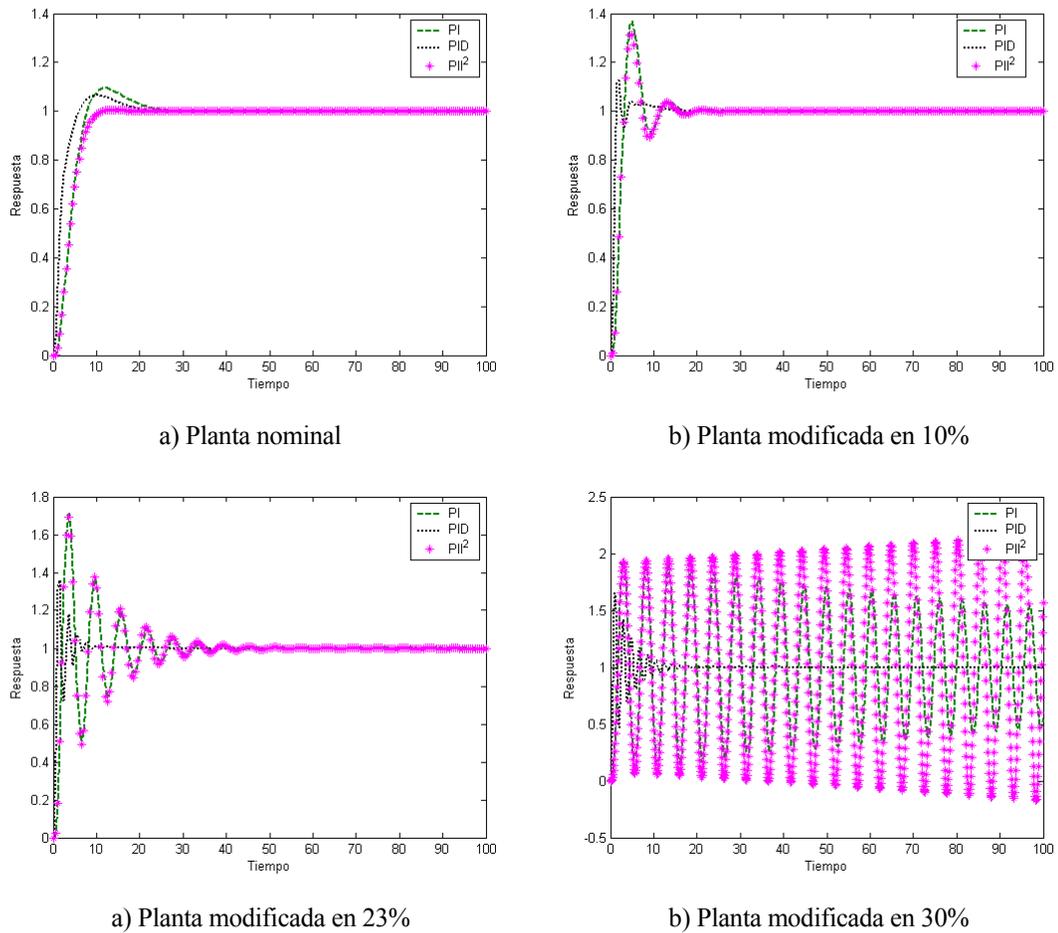


Figura 4.12 Respuesta del Caso *a* con la planta modificada

## 4.4 Conclusiones

Del análisis realizado en los parámetros globales del controlador PII<sup>2</sup> se obtuvo que el parámetro  $K_e$  no mejora la robustez del sistema de control.

Es necesario realizar una sintonización muy precisa de los parámetros del controlador PII<sup>2</sup>,  $L$  y  $\tau_c$ , para obtener sistemas estables. Lo anterior se debe a que la robustez es muy sensible a dichos parámetros.

Las recomendaciones propuestas por Alvarez-Ramírez y col. (1997a) para los parámetros del controlador PII<sup>2</sup> producen sistemas con grandes errores y con márgenes de robustez pequeños (13% en promedio) debido a que toma en cuenta solamente la constante del tiempo del proceso. Con el método de sintonización propuesto en este capítulo para el

---

controlador  $PII^2$  se duplicó el promedio en el margen de robustez (26%). Sin embargo, los controladores PI sintonizado por ZN y por el algoritmo propuesto en el Capítulo 3, y el controlador PID sintonizado con el algoritmo propuesto tuvieron un promedio mayor en el margen de robustez. Del análisis del margen de robustez se observó que el controlador  $PII^2$  no mejora la robustez en comparación con el controlador PI en ninguno de los métodos de sintonización utilizados.

En las repuestas a lazo cerrado analizadas se concluye que el controlador  $PII^2$  (sintonizado con el método propuesto) tiene un buen desempeño dinámico con la planta nominal, superior a los otros controladores. Sin embargo, de acuerdo a los resultados mostrados su mejor desempeño dinámico no representó mayor robustez.

---

# Capítulo 5

## Robustez en Controladores IMC

### 5.1 Introducción

La estructura de control predictiva está basada en una manera natural de ver el control retroalimentado. La idea de la estructura de control predictiva es utilizar un modelo del proceso para determinar el ajuste apropiado de la variable manipulable, debido que el comportamiento futuro de la variable a controlar puede ser predicho a partir de los valores de la variable manipulable. La información retroalimentada es diferente entre la respuesta predicha por el modelo y la respuesta del proceso real. Si la diferencia fuera cero, el control sería perfecto y no sería necesaria ninguna corrección. Es posible derivar diferentes algoritmos prácticos de control con la estructura predictiva como el predictor de Smith y el control de modelo interno (Marlin, 1995).

El sistema de la Figura 5.1 ha sido descrito por varios investigadores quienes han utilizado diferente terminología, pero actualmente se conoce como estructura predictiva. Las publicaciones de Brosilow (1979) y García y Morari (1982, 1985a y 1985b) presentaron un controlador que despertó un considerable interés en la comunidad de Ingeniería Química denominado control de modelo interno (IMC por sus siglas en inglés).

La idea básica del controlador IMC es utilizar un modelo del proceso que corre en paralelo con la planta real (ver Figura 5.1). El efecto de este camino paralelo es restar el

efecto de la variable manipulable de la salida del proceso. Si se supone que el modelo, en un momento dado, representa perfectamente el proceso, entonces la señal retroalimentada es igual a la influencia de las perturbaciones y no es afectada por la acción de la variable manipulable, por lo que el sistema cancela la influencia de dichas perturbaciones. El sistema global es estable si y sólo si el proceso y el controlador IMC son estables. Si el modelo no representa perfectamente el proceso, la señal retroalimentada expresa la influencia de las perturbaciones y del error del modelo, lo cual ocasiona que la retroalimentación aumente y podría provocar problemas de estabilidad, por lo que se debe buscar un controlador robusto en la sintonización.

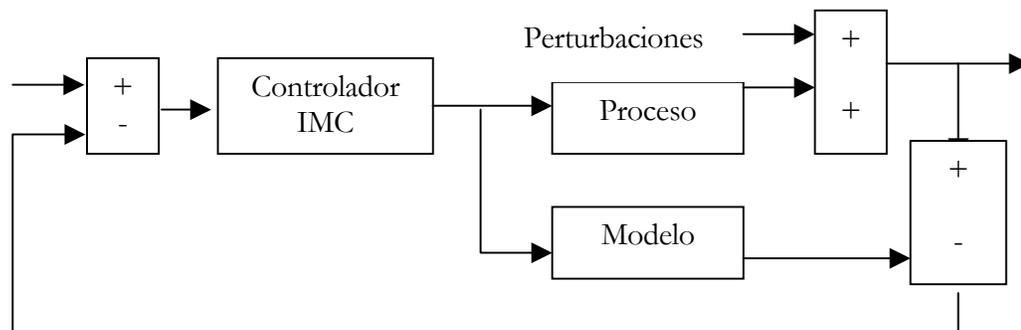


Figura 5.1: Estructura del controlador IMC

El desempeño de control perfecto pudiera ser alcanzado si el controlador es igual a la inversa del modelo dinámico en el sistema predictivo.

$$G_c(s) = [G_\mu(s)]^{-1} \quad 5.1$$

donde  $G_\mu$  es la función de transferencia del modelo. Este pudiera parecer un requerimiento simple, pero no es posible obtener la inversa de todos los modelos.

En la mayoría de los procesos físicos la función de transferencia incluye tiempo muerto en el numerador. Al invertir este modelo el controlador debería incluir la habilidad de utilizar información futura para determinar el valor de la variable manipulable actual, como indicaría el elemento predictivo  $e^{Ds}$ . Este tipo de modelos no son físicamente realizables. Otro problema sucede con funciones de transferencias con ceros en el semiplano derecho; al invertir este modelo se tendrían *polos* con parte real positiva, es decir, el controlador sería inestable.

Si no es posible calcular la inversa del modelo, es necesario segregarse y eliminar los aspectos de la función de transferencia que hacen imposible el cálculo de la misma. El modelo se considera el producto de dos factores, una parte invertible y una no invertible.

$$G_{\mu}(s) = G_{\mu}^{+}(s)G_{\mu}^{-}(s) \quad 5.2$$

$G_{\mu}^{+}(s)$  es la parte no invertible. La inversa de este término incluye predicciones ( $e^{Ds}$ ) y polos inestables. La ganancia en estado estable de este término es 1.

$G_{\mu}^{-}(s)$  es la parte invertible. La inversa de este término es estable, proporcionando un controlador realizable. La ganancia en estado estable de este término es la ganancia del modelo  $k_p$ .

El controlador IMC elimina todos los elementos del modelo que haría el controlador irrealizable, al tomar solamente el factor invertible del modelo:

$$G_{cp}(s) = [G_{\mu}^{-}(s)]^{-1} \quad 5.3$$

En este punto se tiene otro problema ya que el modelamiento de los procesos reales se realiza empleado funciones de transferencia que tienen un denominador de mayor orden que el numerador. Por lo tanto, el controlador, que es el inverso del modelo del proceso, tendrá un numerador de mayor orden que su denominador provocando que el controlador no sea realizable. Para solucionar este problema se aplica un filtro en la señal retroalimentada, el cual se coloca antes del controlador.

La ganancia del controlador es la inversa del modelo del proceso, mientras que la ganancia del filtro es la unidad. La siguiente ecuación para el filtro es convencionalmente utilizada en el diseño de controladores IMC para lazos sencillos.

$$G_f(s) = \left[ \frac{\mathbf{1}}{\tau_f s + \mathbf{1}} \right]^N \quad 5.4$$

Por lo anterior el controlador IMC está compuesto por el filtro y por la inversa de la parte invertible del modelo

$$G_c(s) = G_f(s)G_{cp}(s) \quad 5.5$$

El exponente del filtro  $N$  se selecciona lo suficientemente grande para que el producto del controlador ( $G_f G_{cp}$ ) tenga un denominador polinomial en  $s$  de orden, al menos, tan grande como el orden del numerador polinomial para asegurar que el control sea realizable.

Se puede escribir la función de transferencia global para el sistema retroalimentado de la Figura 5.1 relacionando sus salidas con sus entradas. La función de transferencia del lazo cerrado sería:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{\mathbf{1} + G_c(s)(G_p(s) - G_\mu(s))} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d(s)(\mathbf{1} - G_c(s)G_\mu(s))}{\mathbf{1} + G_c(s)(G_p(s) - G_\mu(s))} \bar{d}(s) \quad 5.6$$

donde  $G_p$ ,  $G_c$ ,  $G_\mu$  y  $G_d$  son las funciones de transferencia del proceso real, controlador IMC (incluye filtro), modelo de la planta y perturbación, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación característica del controlador IMC será  $\mathbf{1} + G_c(G_p - G_\mu)$ .

## 5.2 Análisis de robustez

El margen de robustez del controlador IMC se estudió para los casos mostrados en la Figura 3.1. Debido a que el controlador está formado por la parte invertible del modelo y por el filtro, existe un solo parámetro de sintonización, la constante de tiempo del filtro  $\tau_F$ . El análisis del margen de robustez se hará en base a este único parámetro de sintonización. También se analiza el comportamiento del integral del error al cuadrado (ISE), en función del parámetro de sintonización  $\tau_F$ , que se obtendría en la respuesta a lazo cerrado para un cambio escalón unitario en el set point.

La Figura 5.2 presenta el comportamiento del margen de robustez en función  $\tau_F$  para el Caso *a*. Se observa que valores pequeños del parámetro  $\tau_F$  se obtienen grandes márgenes de robustez; al ir aumentando  $\tau_F$  el margen de robustez disminuye rápidamente hasta un mínimo, para luego comenzar a aumentar lentamente. En este caso la respuesta es más robusta cuando el filtro es muy rápido.

En la Figura 5.3 se grafica la integral del error al cuadrado (ISE), para el Caso *a*, que se obtiene al hacer un cambio escalón en el set point para cada valor del parámetro  $\tau_F$ . El comportamiento del error es lineal, aumentando a medida que se aumenta el valor del parámetro  $\tau_F$ . En el Caso *a* la mayor robustez y el menor error se obtienen en valores pequeños de  $\tau_F$  (cuando el filtro es muy rápido).

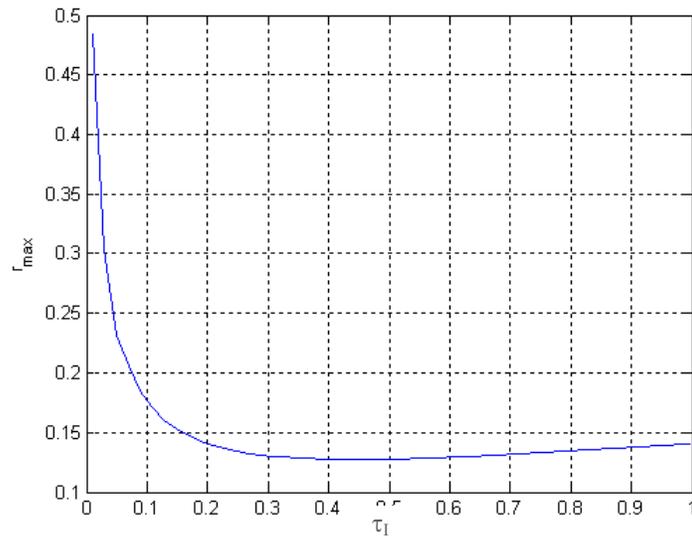


Figura 5.2: Análisis de robustez del controlador IMC para el Caso *a*

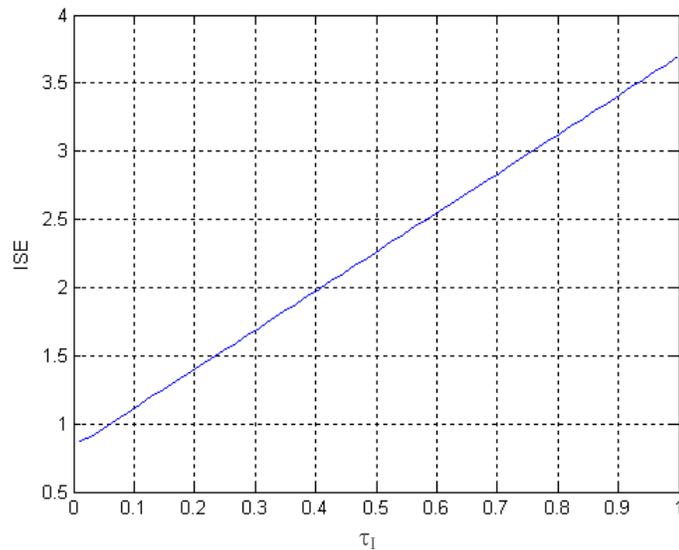


Figura 5.3: Error en la respuesta a un cambio escalón en el set point para en el Caso *a*

La Figura 5.4 presenta el comportamiento del margen de robustez en función de  $\tau_F$  para el Caso *c*. Puede verse que a valores pequeños del parámetro  $\tau_F$  se obtienen grandes márgenes de robustez; al ir aumentando  $\tau_F$  el margen de robustez disminuye rápidamente hasta un

mínimo, para luego mantener el valor del margen de robustez prácticamente constante al aumentar  $\tau_F$ .

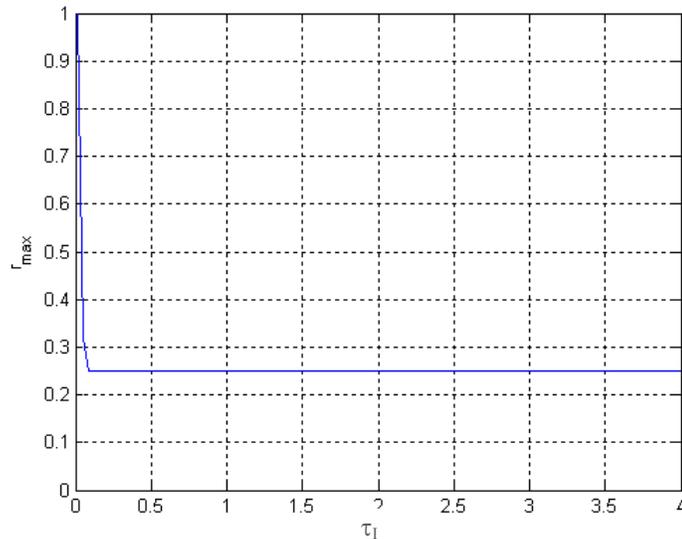


Figura 5.4: Análisis de robustez para el Caso  $c$

La Figura 5.5 muestra la integral del error de la respuesta al cuadrado (ISE) en función de  $\tau_F$ , para el Caso  $c$ . Se observa que a valores bajos de  $\tau_F$  se tienen errores muy grandes. Al aumentar  $\tau_F$  el error disminuye hasta un mínimo y comienza a aumentar más lentamente. Esto indica que en el Caso  $c$  se tiene mayor robustez en valores muy pequeños de  $\tau_F$ , pero el error que se obtiene en la respuesta dinámica es muy grande. Por ello el parámetro  $\tau_F$  no se debe seleccionar muy pequeño. Este comportamiento se debe a que el Caso  $c$  tiene una respuesta inversa que se aumenta al tener un filtro muy rápido.

En la Figura 5.6 se presenta el comportamiento del margen de robustez al variar  $\tau_F$ , para el Caso  $d$  (con  $D = 0.2$  y  $\tau_Z = 0.2$ ). Se observan grandes márgenes de robustez en valores muy pequeños del parámetro  $\tau_F$ . Al aumentar  $\tau_F$  el margen de robustez disminuye rápidamente hasta un mínimo, después del cual comienza a aumentar hasta valores considerablemente altos.

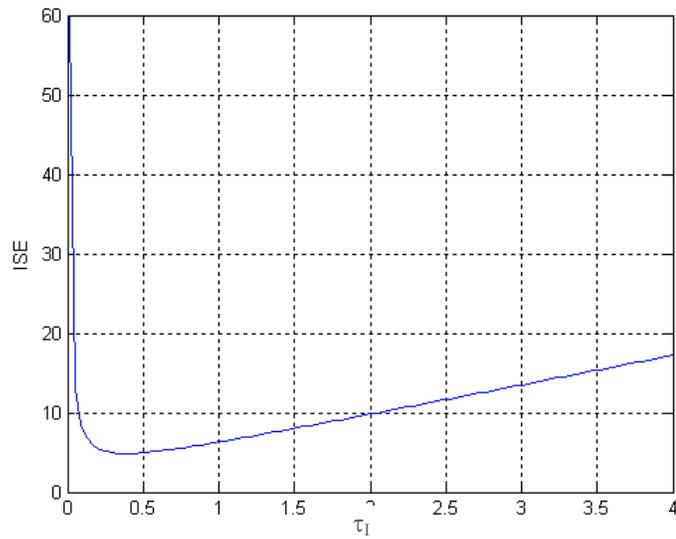


Figura 5.5: Error para la respuesta a una cambio escalón en el set point para en el Caso *c*

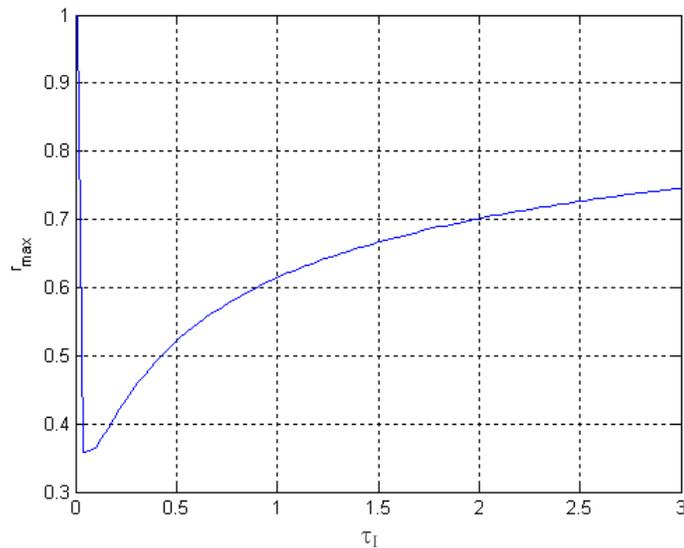


Figura 5.6: Análisis de robustez para el Caso *d* con  $D = 0.2$  y  $\tau_Z = 0.2$

En la Figura 5.7 se grafica la integral del error al cuadrado (ISE) que se obtiene al hacer un cambio escalón en el set point para diferentes valores del parámetro  $\tau_F$ , en el Caso *d* (con  $D = 0.2$  y  $\tau_Z = 0.2$ ). Se ve que en valores bajos de  $\tau_F$  se tienen errores moderados. En este caso al tener una leve respuesta inversa y un tiempo muerto pequeño el error no se dispara a

$\tau_F$  muy bajos, lo cual sucede a valores grandes de tiempo muerto y/o respuestas inversas (como en la Figura 5.5). Al aumentar  $\tau_F$  el error disminuye hasta un mínimo para después comenzar a aumentar. Esto indica que para el Caso *d* a valores muy pequeños de  $\tau_F$  se obtiene la mayor robustez pero no el mínimo error en la respuesta, lo cual debe tomarse en cuenta para la sintonización del controlador.

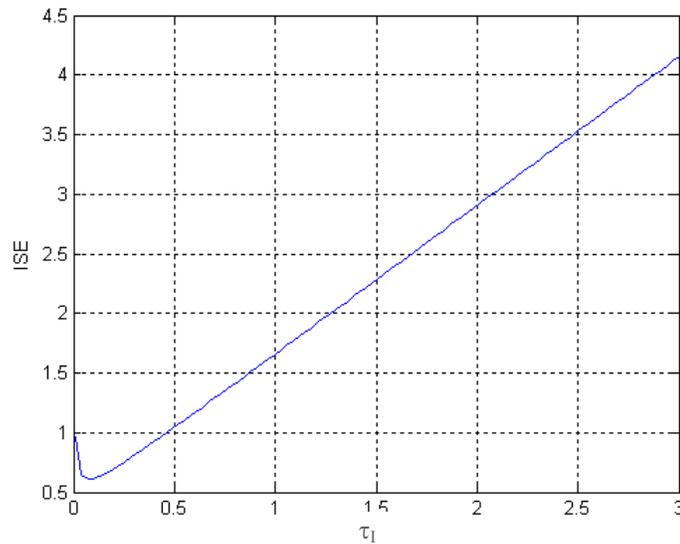


Figura 5.7: Error para la respuesta a una cambio escalón en el set point para el Caso *d* con  $D = 0.2$  y  $\tau_Z = 0.2$

### 5.3 Robustez en la sintonización del controlador IMC

Los resultados del análisis de la sección anterior indican que para obtener mayor robustez en los sistemas de fase mínima, aquellos que no presentan tiempo muerto ni respuestas inversas, deben de tener un parámetro  $\tau_F$  pequeño. El término *fase mínima* indica que el sistema presenta el mínimo retardo de fase posible para la magnitud de la respuesta  $|G(\omega)|$ . Para sistemas estables de fase mínima existe una relación única entre la ganancia y la fase de la respuesta en la frecuencia. Los tiempos muertos y los ceros positivos (respuesta inversas) contribuyen con retardos de fase adicionales, en comparación con el sistema de fase mínima, para la misma ganancia.

En los sistemas con tiempo muerto o respuesta inversa (cero positivo) el valor del parámetro  $\tau_F$  no debe seleccionarse pequeño, ya que provocaría errores muy grandes debido a las grandes repuestas inversas que provocaría. Para estos sistemas que no tienen fase mínima el valor de  $\tau_F$  se selecciona lo más grande posible, teniendo como límite el error de la respuesta para el caso sintonizado con Ziegler-Nichols.

En el presente trabajo se desarrollo un algoritmo para la selección del parámetro  $\tau_F$ . de acuerdo a los resultados anteriores; dicho algoritmo se presenta en la Figura 5.8.

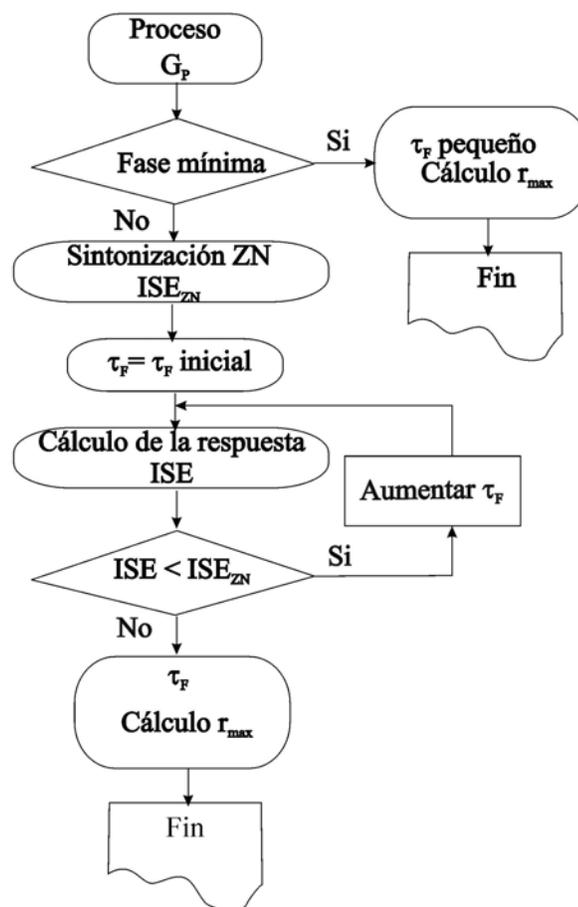


Figura 5.8: Diagrama de flujo para la sintonización de controlador IMC

Se realizó la sintonización del controlador IMC para todos los casos de estudios. Los resultados del margen de robustez para todos los controladores se comparan en la Figura 5.9. El promedio del margen de robustez para el controlador PI sintonizado con ZN es 31%, 37% para el controlador PI sintonizado con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3, 20% para el

controlador PID con ZN, 34% para el controlador PID con el algoritmo propuesto, 26% para el controlador  $PII^2$  y 59% para el controlador IMC sintonizado con el algoritmo de la Figura 5.8. El promedio del margen de robustez del controlador IMC fue superior a todos los controladores en todos los casos de estudio, indicando que el controlador IMC es el más robusto.

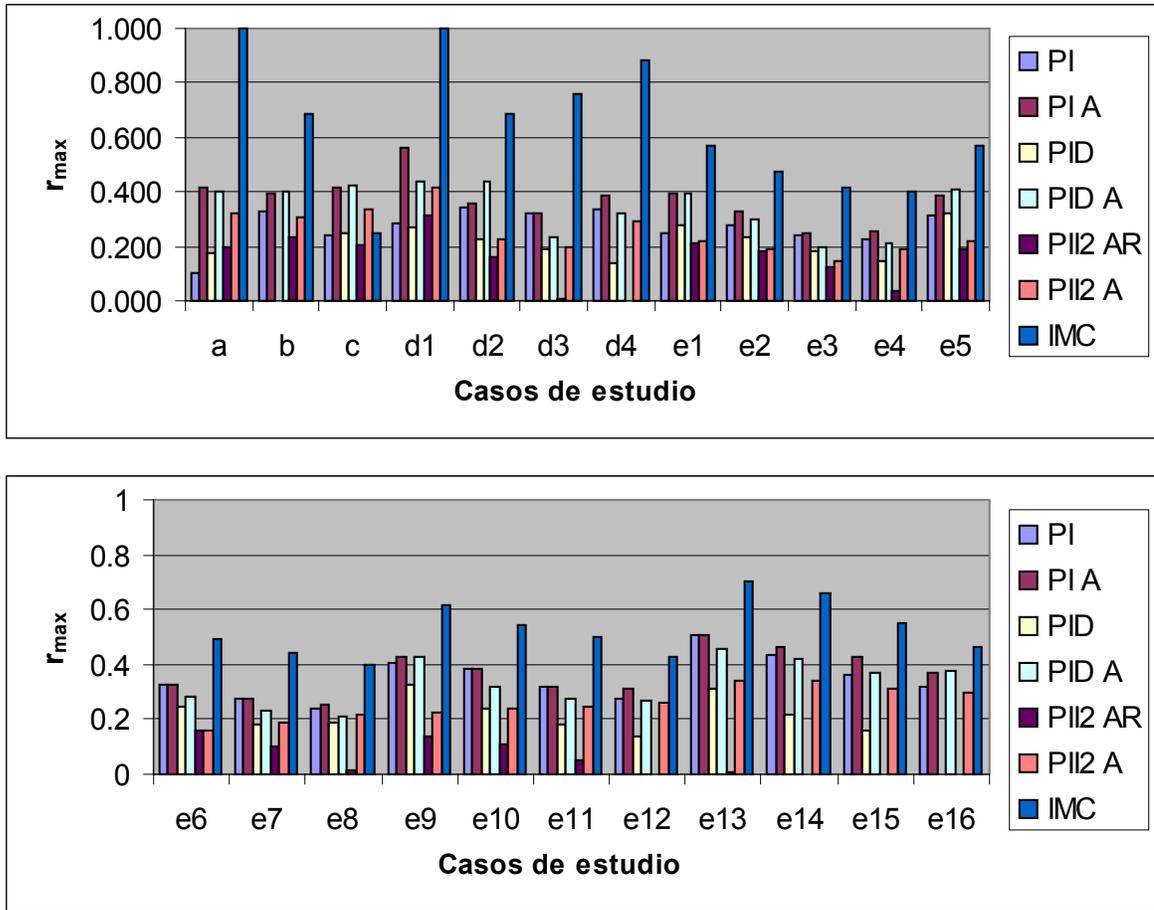


Figura 5.9: Comparación del margen de robustez

La Figura 5.10 muestra la respuesta del Caso *a*, para todos los controladores a un cambio escalón en el set point. Se puede observar que los sistemas PI y PID sintonizados con ZN presentan las mayores oscilaciones. Los sistemas PI y PID sintonizados con el algoritmo propuesto tienen una respuesta más suave con un sobretiro pequeño. El sistema  $PII^2$  presenta una respuesta suave y sin sobretiro. Sin embargo, el controlador IMC presenta la mejor respuesta al ser la más rápida en alcanzar el set point y sin sobretiro.

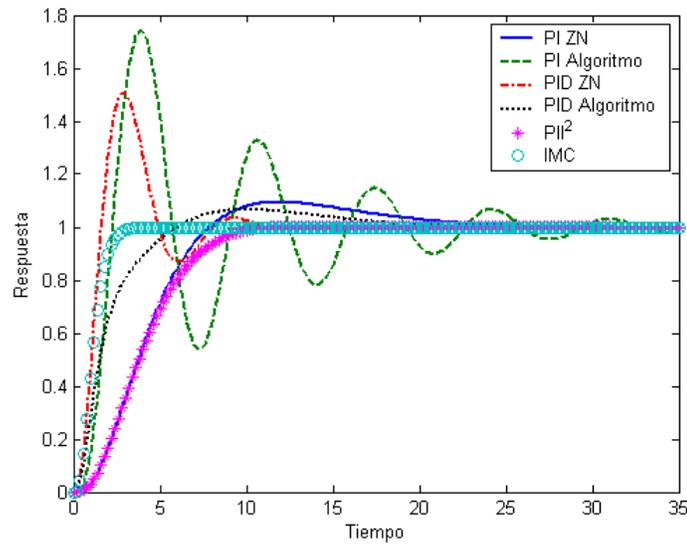


Figura 5.10: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso *a*

La Figura 5.11 muestra la respuesta ante un cambio escalón en el set point para el Caso *e* ( $D = 0.8$  y  $\tau_z = 0.4$ ) para todos los controladores. El controlador PI sintonizado con ZN tiene la respuesta más lenta, además de un comportamiento oscilatorio. Los sistemas PID sintonizados con ZN y con el algoritmo tienen una respuesta rápida, pero con un sobretiro pequeño y un comportamiento oscilatorio. El sistema  $PI^2$  presenta una respuesta suave y con un pequeño sobretiro. Sin embargo, el controlador IMC presenta la mejor respuesta ya que, además de ser rápida, es la única sin oscilaciones y sin sobretiro.

Como ejemplo demostrativo de los resultados del margen de robustez se realizaron modificaciones en los coeficientes del Caso *e* ( $D = 0.8$  y  $\tau_z = 0.4$ ), y se graficaron las respuestas dinámicas obtenidas para las plantas modificadas. Los cambios realizados en los coeficientes fueron del 10, 20 y 25%. Los controladores utilizados fueron el PI y PID sintonizados con ZN y con el algoritmo del Capítulo 3, el controlador  $PI^2$  sintonizado con el algoritmo propuesto en el Capítulo 4 y el controlador IMC sintonizado con el algoritmo propuesto en la Figura 5.8. Los resultados de este análisis se presentan en la Figura 5.12.

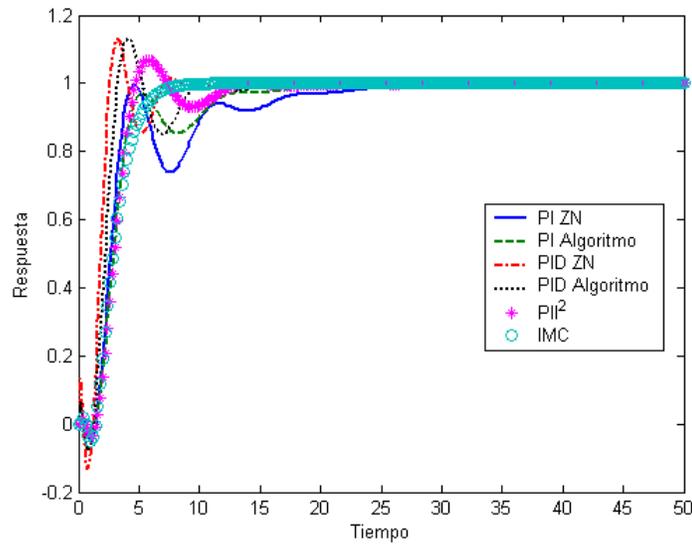


Figura 5.11: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso  $e$  con  $D = 0.8$  y  $\tau_z = 0.4$

La Figura 5.12 a) muestra las respuestas de los controladores para la planta nominal; se observa que el controlador PI sintonizado con ZN sintonizado y el controlador PI sintonizado con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3 son los que presentan el mayor error por ser las más lentas en alcanzar el set point, seguidos de los controladores PID (sintonizados por ambos métodos). El comportamiento del controlador  $PII^2$  es superado solamente por la respuesta del controlador IMC por ser la más rápida y sin sobretiro. La Figura 5.12 b) muestra que al modificar la planta en un 10%, el controlador  $PII^2$  tiene el mayor error, seguido de los controladores PID sintonizados por ambos métodos; los controladores PI tienen un error menor con un sobretiro más pequeño, mientras que el mejor desempeño dinámico lo mantiene el controlador IMC al tener la respuesta con el menor error y sin oscilaciones. En la Figura 5.12 c) se presentan las respuestas obtenidas para la planta modificada en un 20%. Se observa que las peores respuestas las presentaron los controladores PID sintonizados con ambos métodos y el controlador  $PII^2$ , cuyas respuestas son muy oscilatorias, mientras que las respuestas de los controladores PI sintonizados con ambos métodos y el controlador IMC tienen un menor error con un sobretiro pequeño y con algunas oscilaciones pequeñas. En la Figura 5.12 d) se presentan las respuestas de la planta con un 25% de variación. En este caso los sistemas que emplean controladores PID y  $PII^2$  se vuelven

inestables, mientras que los controladores PI y el IMC permanecen estables con un sobretiro moderado y algunas oscilaciones. Las respuestas obtenidas en este ejercicio son consistentes con los resultados del margen de robustez obtenidos para este caso: 18% para el controlador PID sintonizado con ZN, 19% para el  $PII^2$ , 23% para el PID sintonizado con el algoritmo propuesto en el Capítulo 3, 27% para el PI sintonizado con ZN, 31% para el PI sintonizado con el algoritmo propuesto y 44% para el IMC.

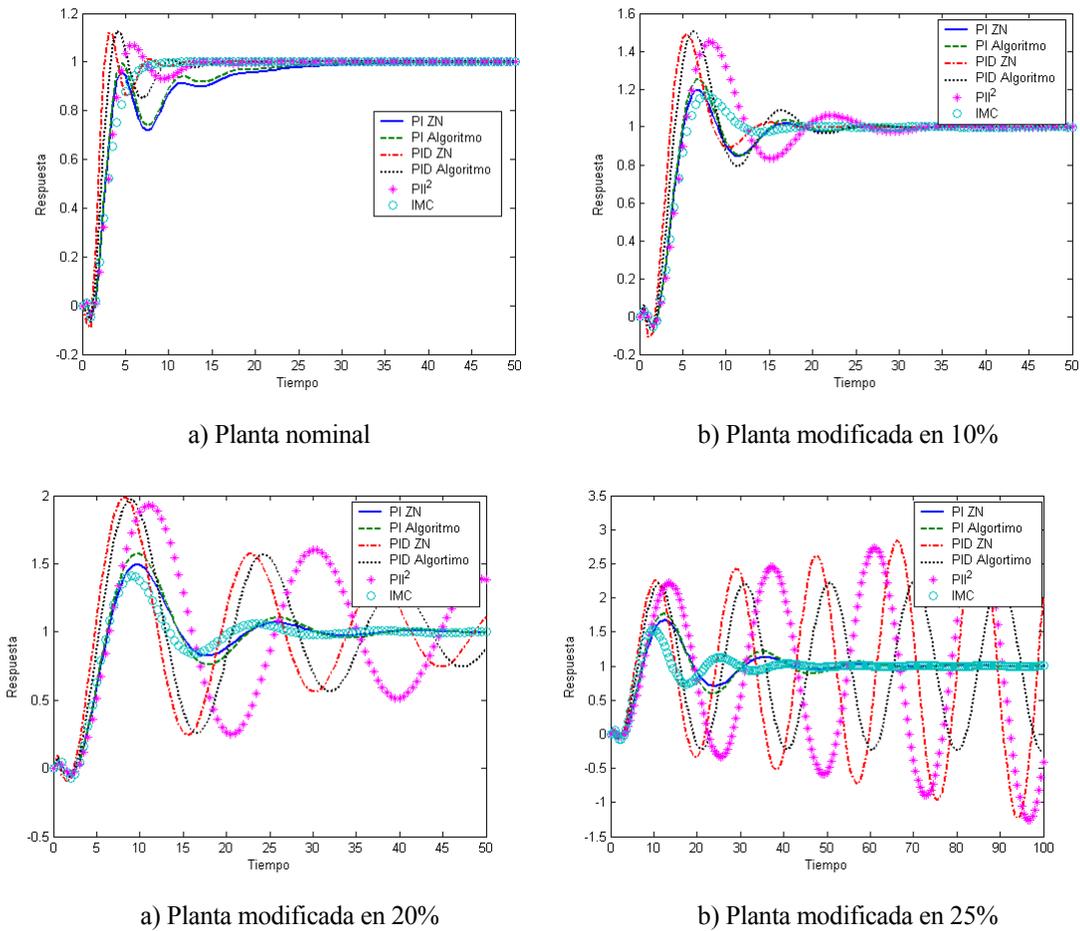


Figura 5.12: Respuestas a un cambio escalón en el set point para todos los controladores en el Caso e ( $D = 0.8$  y  $\tau_z = 0.4$ ) con la planta modificada

## 5.4 Conclusiones

Se estudió la robustez del controlador IMC en función de su único parámetro de sintonización, la constante de tiempo del filtro ( $\tau_F$ ). El análisis del margen de robustez indicó que en los sistemas de fase mínima el parámetro  $\tau_F$  debe seleccionarse con un valor pequeño. En los sistemas con tiempo muerto o respuesta inversa (sistema que no tienen fase mínima) el valor de  $\tau_F$  debe seleccionarse lo más grande posible hasta obtener un error igual al error de la respuesta para el caso sintonizado con Ziegler-Nichols. El controlador IMC sintonizado con la metodología propuesta demostró ser más robusto que los otros controladores, con un promedio del margen de robustez del 59 % que es notablemente mayor a los demás controladores. Además, tuvo el mejor desempeño dinámico, también muy superior al de los otros controladores (PI, PID y PII<sup>2</sup>).

---

# Capítulo 6

## Robustez en Controladores Multivariables

### 6.1 Introducción

El control multivariable ocurre prácticamente en todos los procesos químicos porque variables como el flujo, nivel, presión, temperatura y calidad de los productos son controlados simultáneamente. El enfoque de múltiples lazos, en el cual se utilizan múltiples controladores de lazo simples, fue el primero en emplearse en el control multivariable para los procesos industriales (Marlin, 1995). Una ventaja del enfoque de múltiples lazos es que se utiliza un algoritmo simple. Otra ventaja es que debido a la simplicidad de su estructura de control, es fácil de entender para el personal que opera la planta. Como cada lazo controla una variable medible ajustando una variable manipulable, la acción de los controladores es fácil de monitorear.

El problema en los sistemas de múltiple entrada y múltiple salida (MIMO) es que la manipulación hecha a un controlador puede tener efecto en las variables de los otros controladores; es decir, pueden existir interacciones entre los lazos de control individuales. Un proceso multivariable se dice que tiene interacciones cuando las variables de entrada al proceso afectan a más de una variable de salida del proceso.

La principal diferencia entre un sistema SISO y un sistema MIMO es la presencia de direcciones. Las direcciones son relevantes para vectores y matrices pero no para escalares. Sin embargo, a pesar del complicado factor de dirección, la mayoría de las técnicas y las ideas de los sistemas SISO pueden ser extendidas a los sistemas MIMO.

Para el control multivariable existe una técnica útil para cuantificar la controlabilidad de un sistema, llamada descomposición en valores singulares (SVD). La controlabilidad es la capacidad de alcanzar un desempeño de control aceptable, lo cual significa mantener la salida dentro de un límite especificado o evitar que se desplace de su referencia, utilizando las entradas y las mediciones disponibles. Una planta es controlable si existe un controlador que produce un buen desempeño para todas las variaciones de las plantas. La controlabilidad es independiente del controlador, pues es una propiedad de la planta, por lo cual el estudio de controlabilidad se realiza a lazo abierto.

La SVD es una técnica que emplea la función de transferencia del proceso a lazo abierto, permitiendo determinar la controlabilidad de dicho proceso independientemente del controlador empleado. Con la SVD se predice el desempeño teórico que tendría el sistema a lazo cerrado, y es posible hacer comparaciones de controlabilidad entre sistemas diferentes.

En el presente trabajo el control multivariable se estudió tomando las secuencias térmicamente acopladas STAD, STAI y Petlyuk como casos de estudios. Cada secuencia cuenta con tres variables manipulables y tres variables controladas. A lazo abierto se analizó la descomposición en valores singulares. A lazo cerrado se estudió el margen de robustez y el IAE al aplicar los controladores PI, PII<sup>2</sup> e IMC. Es importante resaltar que el controlador PII<sup>2</sup> no ha sido estudiado en sistemas MIMO.

## 6.2 Descomposición en valores singulares

Los valores singulares de una matriz son una medida de qué tan cerca está la matriz de ser “singular”, es decir, que su determinante sea cero. Para una descripción detallada sobre la SVD se recomienda el texto de Skogestad y Postlethwaite (1996).

Una matriz de  $l \times m$  tiene  $\min\{l, m\}$  valores singulares. Considérese una frecuencia fija  $\omega$  donde  $G(j\omega)$  es una matriz compleja constante  $l \times m$ . Esta matriz puede ser descompuesta en sus valores singulares.

---

$$G = U\Sigma V^H \quad 6.1$$

donde  $\Sigma$  es una matriz  $l \times m$  con  $k = \min\{l, m\}$  valores singulares no negativos, arreglados en orden descendente en la diagonal; los otros elementos son cero. Los valores singulares son las raíces positivas de los eigenvalores de  $G^H G$ , donde  $G^H$  es la transpuesta conjugada de  $G$ .

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad 6.2$$

$U$  es una matriz unitaria de  $l \times l$  de vectores singulares de salida,  $\mathbf{u}_i$ .

$V$  es una matriz unitaria de  $m \times m$  de vectores singulares de entrada,  $\mathbf{v}_i$ .

Siendo una matriz real de  $2 \times 2$ , la SVD se puede escribir en la siguiente forma:

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \pm \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \pm \cos \theta_2 \end{bmatrix}^T}_{V^T} \quad 6.3$$

donde los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dependen de la matriz dada. En la Ecuación 6.3 se observa que las matrices  $U$  y  $V$  involucran rotaciones y sus columnas son ortogonales.

Los vectores columna de  $U$ , denotados  $\mathbf{u}_i$ , representan las direcciones de salida de la planta. Estos son ortonormales (ortogonales y unitarios).

$$\|\mathbf{u}_i\| = \sqrt{|\mathbf{u}_{i1}|^2 + |\mathbf{u}_{i2}|^2 + \dots + |\mathbf{u}_{il}|^2} = \mathbf{1} \quad 6.4$$

$$\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_i = \mathbf{1}, \quad \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \mathbf{0}, \quad i \neq j \quad 6.5$$

Del mismo modo, los vectores de columnas  $V$ , denotado como  $\mathbf{v}_i$ , son ortogonales y unitarios, y representan las direcciones de entrada. Estas direcciones de entradas y salidas están relacionadas por los valores singulares. Dado que  $V$  es unitario se tiene que  $V^H V = I$ ; entonces de la Ecuación 6.1 se tiene

$$GV = U\Sigma \quad 6.6$$

Esta misma ecuación escrita para el  $i$ -ésimo valor singular de  $G$  es

$$G\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad 6.7$$

donde  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{u}_i$  son vectores, mientras que  $\sigma_i$  es un escalar. Si se considera una entrada en la dirección  $\mathbf{v}_i$ , entonces la salida es en la dirección  $\mathbf{u}_i$ . Además, dado que  $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$  y  $\|\mathbf{u}_i\|_2 = 1$ ,

el  $i$ -ésimo valor singular,  $\sigma_i$ , proporciona directamente la ganancia de la matriz  $G$  en esa dirección.

$$\sigma_i(G) = \|Gv_i\|_2 = \frac{\|Gv_i\|_2}{\|v_i\|_2} \quad 6.8$$

La mayor ganancia en cualquier dirección de entrada es igual al valor singular máximo.

$$\sigma^{\max}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_1\|_2}{\|v_1\|_2} \quad 6.9$$

La menor ganancia en cualquier dirección de entrada es igual al valor singular mínimo.

$$\sigma^{\min}(G) \equiv \sigma_k(G) = \min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_k\|_2}{\|v_k\|_2} \quad 6.10$$

donde  $k = \min\{l, m\}$ . De esta manera, para cualquier vector  $d$  se tiene que

$$\sigma^{\min}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \leq \sigma^{\max}(G) \quad 6.11$$

El valor singular mínimo de la planta,  $\sigma^{\min}(G(\omega_j))$ , evaluado como una función de la frecuencia, es una medida útil para analizar la factibilidad de alcanzar un control aceptable. Si las entradas y las salidas están escaladas, entonces con una entrada manipulada de magnitud unitaria se obtendría una salida de magnitud de al menos  $\sigma^{\min}(G(\omega_j))$  en cualquier dirección.

El valor singular mínimo es una medida de la invertibilidad del sistema, ya que es una medida de la distancia mínima a la matriz singular más próxima (Lau y col. 1985). El inverso del valor singular mínimo es una medida del esfuerzo del control, siendo proporcional a la apertura de la válvula correspondiente a la variable manipulable apropiada de acuerdo a la perturbación especificada. Morari y Grimm (1985) señalan que las perturbaciones menores a  $\sigma^{\min}$  son asimiladas por el sistema sin que ocurra saturación de las variables manipulables; las perturbaciones entre  $\sigma^{\min}$  y  $\sigma^{\max}$  pueden ocasionar saturación de las variables pero el sistema es controlable; las perturbaciones superiores a  $\sigma^{\max}$  no pueden ser asimiladas y el sistema es incontrolable. Por lo anterior se desea que  $\sigma^{\min}$  sea lo más grande posible. Morari (1983) y Yu y Luyben (1986) discuten el valor singular mínimo y su utilización, llamándolo “índice de elasticidad de Morari”.

El número de condición de una matriz está definido como la relación entre el valor singular máximo y el valor singular mínimo.

$$\gamma(G) = \frac{\sigma^{\max}(G)}{\sigma^{\min}(G)} \quad 6.12$$

Una matriz con un número de condición grande se dice ser “mal condicionada”. Para una matriz no singular  $\sigma^{\min}(G) = 1 / \sigma^{\max}(G^{-1})$ , entonces  $\gamma(G) = \sigma^{\max}(G)\sigma^{\max}(G^{-1})$ . De ahí que el número de condición sea grande si  $G$  y  $G^{-1}$  contienen elementos grandes.

El número de condición se ha utilizado como una medida de la controlabilidad de entrada salida, y en general se ha postulado que un número de condición elevado indica sensibilidad a las incertidumbres. Si el número de condición es pequeño, entonces los efectos multivariables de las incertidumbres probablemente no sean de consideración. Un número de condición elevado es ocasionado por  $\sigma^{\min}(G)$  pequeño, el cual es indeseable ya que indica problemas de control. Un sistema mal condicionado ( $\gamma$  grande) amplifica los errores de modelamiento; es por ello que se prefieren los sistemas con número de condición cercanos a la unidad.

Se espera que los sistemas con el más alto valor singular mínimo y el menor número de condición muestren el mejor desempeño dinámico bajo control retroalimentado.

### 6.3 Función de transferencia para sistemas MIMO

Considere un proceso a lazo abierto con  $n$  variables controladas,  $n$  variables manipulables. El sistema puede ser descrito en el dominio de Laplace por  $n$  ecuaciones que proporcionan las funciones de transferencia mostrando cómo las variables manipulables y las perturbaciones afectan cada una de las variables controladas.

$$\begin{aligned} y_1 &= G_{11}m_1 + G_{12}m_2 + \cdots + G_{1n}m_n + G_{d1}d \\ y_2 &= G_{21}m_1 + G_{22}m_2 + \cdots + G_{2n}m_n + G_{d2}d \\ &\vdots \\ y_n &= G_{n1}m_1 + G_{n2}m_2 + \cdots + G_{nn}m_n + G_{dn}d \end{aligned} \quad 6.13$$

Todas las variables se encuentran en el dominio de Laplace. Este conjunto de  $n$  ecuaciones se representa convenientemente en forma matricial. La respuesta a lazo abierto es:

$$Y = G_p(s)M(s) + G_d(s)D(s) \quad 6.14$$

donde  $Y$  = vector de  $n$  variables controladas

$G_p$  = matriz  $n \times n$  de funciones de transferencia del proceso a lazo abierto, que relacionan las variables manipulables y las variables controladas.

$M$  = vector de  $n$  variables manipulables

$G_d$  = vector de funciones de transferencia del proceso que relacionan las variables Controladas y las perturbaciones en la carga

$D$  = perturbaciones en la carga

Cada elemento de la matriz  $G_p$  contiene una función de transferencia que relaciona una variable manipulable con una variable controlada.

$$G_p = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & & & \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \quad 6.15$$

El efecto de cada variable manipulable puede ser estudiado considerando una a la vez si se está trabajando a lazo abierto, o si se está controlando una sola variable, y las demás permanecen a lazo abierto. Sin embargo, cuando el sistema multivariable se encuentra a lazo cerrado, los efectos de todas las variables manipulables deben de considerarse simultáneamente.

La mayoría de los procesos industriales utilizan controladores retroalimentados convencionales de una entrada y una salida (SISO), donde un controlador es empleado en cada lazo para regular una variable controlable con una variable manipulable. La matriz  $G_C$  contiene sólo elementos en la diagonal, los demás elementos son cero.

$$G_C = \begin{bmatrix} G_{C1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{C2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & G_{Cn} \end{bmatrix} \quad 6.16$$

donde  $G_{C1}, G_{C2}, \dots, G_{Cn}$  son controladores individuales en cada uno de los  $n$  lazos. A este sistema multilazos SISO se le conoce como “controlador diagonal”. Es importante mencionar que no se deben sintonizar independientemente los controladores. La dinámica y estabilidad

de los procesos multivariantes en lazo cerrado depende de los valores fijados para todos los controladores.

Una de las mayores dificultades en el control multivariable es la sintonización de los controladores en un sistema diagonal SISO multilazos. Si se utilizan controladores PI, habrá  $2n$  parámetros por sintonizar. Las ganancias y las constantes de tiempo integrales deben de especificarse de tal manera que el sistema global sea estable y tenga una respuesta aceptable. A continuación se muestra la matriz de transferencia al utilizar controladores PI.

$$G_C = \begin{bmatrix} k_{C1} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{I1}s} \right) & 0 & 0 \\ 0 & k_{C2} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{I2}s} \right) & 0 \\ 0 & 0 & k_{C3} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{I3}s} \right) \end{bmatrix} \quad 6.17$$

El efecto de cambios en el set point y en la carga, en las variables controlables, en el ambiente multivariable a lazo cerrado esta dado por:

$$Y = \left[ [I + G_p G_C]^{-1} G_p G_C \right] Y_{sp} + \left[ [I + G_p G_C]^{-1} G_d \right] D \quad 6.18$$

La ecuación matricial anterior se simplifica a la ecuación escalar que describe el lazo cerrado para un sistema de una entrada y una salida (SISO).

Para calcular la inversa de una matriz el determinante aparece en el denominador de cada elemento. Por lo tanto, los denominadores de todas las funciones de transferencia en la Ecuación 6.18 contienen el término  $\det[I + G_p G_C]$ . Además, la ecuación característica de cualquier sistema está dada por el denominador igualado a cero. Entonces, la ecuación característica del lazo cerrado del sistema multivariable con controladores retroalimentados es la ecuación escalar:

$$\det[I + G_p G_C] = 0 \quad 6.19$$

Esta ecuación característica multivariable y a lazo cerrado es la que se utiliza para determinar el margen de robustez del sistema de control multivariable.

Si se utilizan controladores PII<sup>2</sup>, habrá  $2n$  parámetros por sintonizar. La constante de tiempo a lazo cerrado ( $\tau_C$ ) y el estimador (L) son los parámetros de sintonización en cada lazo

de control. Para este trabajo los parámetros se sintonizan minimizando el error de la respuesta a lazo cerrado.

El procedimiento que se utiliza en el caso multivariable para el controlador IMC consiste en calcular primero la inversa de la matriz del modelo y multiplicarla por una matriz que logra que el controlador sea estable; además se multiplica por el filtro para lograr que el controlador sea realizable. Por lo anterior, el controlador IMC multivariable contiene tres partes: 1) la inversa de la matriz del proceso ( $G^{-1}$ ); 2) un factor para hacer el controlador causal y estable para modelos que no son de fase mínima, es decir, el proceso cuenta con un cero positivo y/o tiempo muerto,  $G_+$ ; y 3) el filtro del controlador para hacerlo propio y realizable ( $G_f$ ).

$$G_c(s) = G^{-1}(s)G_+(s)G_f(s) \quad 6.20$$

El filtro que se utiliza contiene el único parámetro de sintonización del controlador,  $\tau_f$ , para las tres variables a controlar. El filtro es un escalar que multiplica el producto matricial  $G^{-1}G_+$ , haciendo  $G_c$  realizable.

$$G_f(s) = \left[ \frac{1}{\tau_f s + 1} \right]^N \quad 5.4$$

## 6.4 Aplicaciones a secuencias de destilación térmicamente acopladas

La destilación es la operación de separación más utilizada en la industria química y petrolera. Esta operación consume grandes cantidades de energía para lograr las separaciones deseadas, por lo cual se han desarrollado tecnologías nuevas para lograr ahorros de energía. En las últimas décadas se han realizado investigaciones en secuencias de columnas no convencionales con acoplamiento térmico. Las secuencias más estudiadas, para la separación de mezclas ternarias, son: la Secuencia Térmicamente Acoplada Directa (STAD) o con rectificador lateral, la Secuencia Térmicamente Acoplada Indirecta (STAI) o con agotador lateral y la secuencia Petlyuk o con prefraccionador, ver Figura 6.1.

Múltiples estudios han demostrado que las secuencias térmicamente acopladas producen ahorros de energía de hasta un 30% en comparación con las secuencias

convencionales (por ejemplo Tedder y Rud, 1978; Glinos y Malone, 1985). Este ahorro de energía se ha explicado en términos del remezclado del componente intermedio que ocurre en las secuencias convencionales (Hernández y col. 2003).

Se han publicado varios métodos de diseño y optimización para secuencias terminalmente acopladas en la separación de mezclas ternarias. Triantafyllou y Smith (1992) presentaron un método corto de diseño para el sistema Petlyuk. Hernández y Jiménez (1996, 1999a) han reportado métodos de diseño que optimiza los sistemas térmicamente acoplados para obtener el menor consumo de energía. Castro y Jiménez (2002) presentaron un método corto de diseño para la columna Petlyuk.

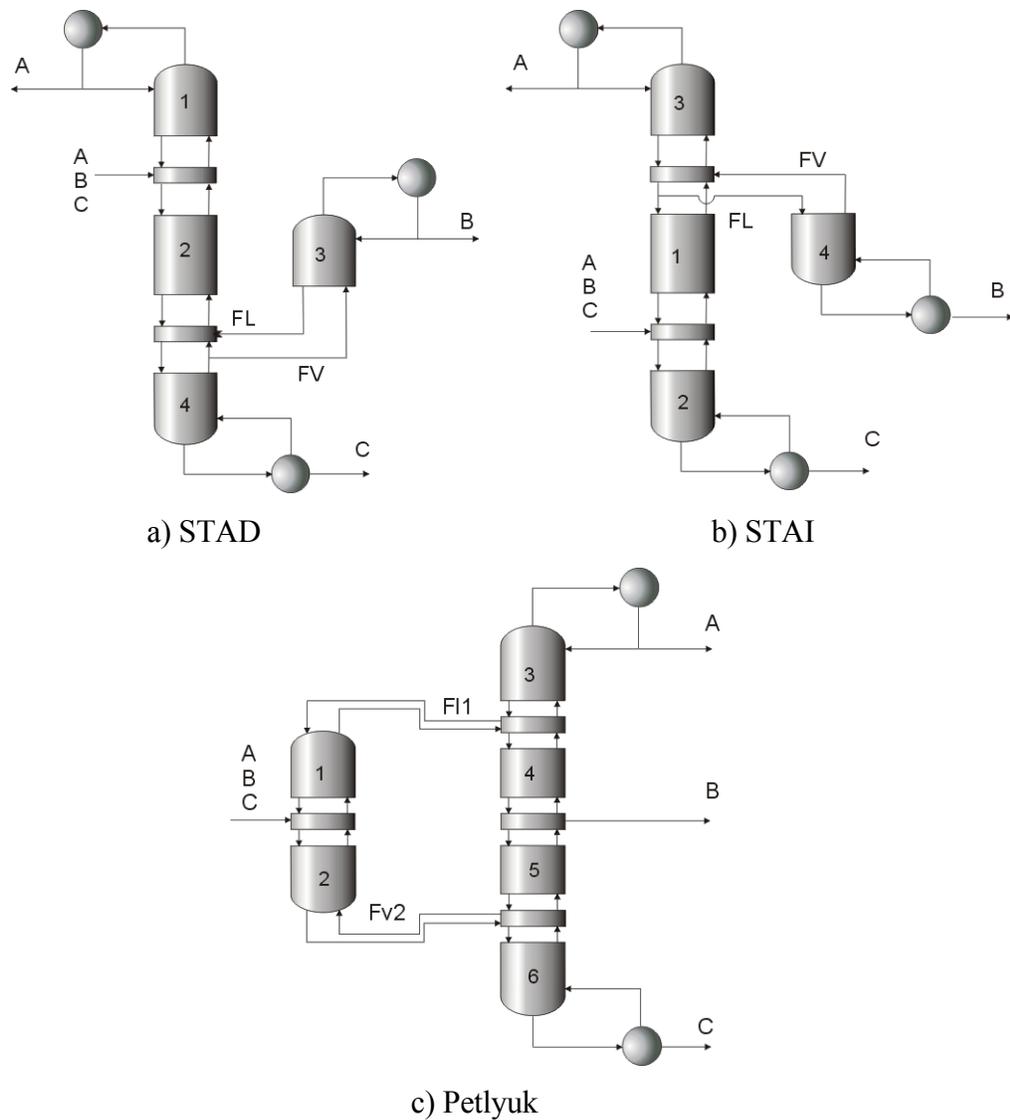


Figura 6.1: Diferentes secuencias de destilación térmicamente acopladas

A pesar de los ahorros que se logran con las secuencias térmicamente acopladas, apenas en años recientes se comenzaron a utilizar industrialmente (Kaibel, 2002). Se pensaba que el ahorro de energía se lograba a expensas de un proceso más difícil de controlar, por las interconexiones entre las columnas.

En el control de las secuencias se han realizados algunos estudios. Alatiqi y Luyben (1986) compara la dinámica y el control de la Secuencia Térmicamente Acoplada Indirecta, Figura 6.1 b, y la Secuencia Convencional Directa. La estructura de control propuesta por ellos resultó ser controlable utilizando cuatro controladores PI convencionales. La respuesta a lazo cerrado, para cambios en la carga, demostró ser tan buena o mejor que la secuencia convencional. Levien y Morari (1987) mostraron resultados experimentales para la Secuencia Térmicamente Acoplada Directa, Figura 6.1 a. Hicieron análisis de descomposición en valores singulares, y se compararon controladores IMC con controladores PID combinados con desacopladores dinámicos. Wolf y Skogestad (1995) mostraron que el control de tres composiciones no presenta problemas significativos de control, mientras que para el control de 4 composiciones presenta “hoyos” en regiones de operación. Abdul Mutalib y Smith (1998) analizaron dos configuraciones de control para la secuencia Petlyuk (L-S-V y D-S-V) y encontraron que ambas logran un control satisfactorio, pero con el esquema D-S-V se logró un mejor desempeño dinámico. Abdul Mutalib y col. (1998) presentaron resultados de simulación y experimentales, en los cuales mediante la temperatura pudieron obtener sistemas estables bajo perturbaciones en la alimentación. Hernández y Jiménez (1999b) realizaron una comparación de las propiedades de controlabilidad entre las secuencias STAD, STAI y Petlyuk. Los resultados de la descomposición en valores singulares mostraron que las secuencias STAD y STAI tienen mejores propiedades de control que la secuencia Petlyuk. Serra y col. (2003) compararon la controlabilidad de diferentes arreglos de destilación (STAD, STAI y Petlyuk) para la separación de mezclas ternarias. Mostraron que las propiedades de control de la secuencia Petlyuk pueden ser mejoradas al trabajar en condiciones ligeramente diferentes a las condiciones óptimas de operación.

La tesis doctoral de Soto Becerra (2002) es la única en donde se ha realizado un estudio de robustez de las secuencias térmicamente acopladas. En ese trabajo, se compararon

---

diferentes secuencias con retroalimentación de 0.01, ya que con la retroalimentación unitaria se obtenían sistemas inestables. Sin embargo, no se analizó ningún controlador.

En el presente trabajo se estudia la robustez de los controladores PI, PII<sup>2</sup> e IMC aplicados a las secuencias STAD, STAI y Petlyuk para la separación de mezclas ternarias.

## 6.5 Casos de estudio

### 6.5.1 Caso 1

El primer caso de estudio se tomó de Hernández y Jiménez (1999b), y consiste en separar la mezcla ternaria n-butano, i-pentano y n-pentano con alimentación equimolar, para obtener la composición de 98.7 % del componente ligero en la parte superior, 98 % del componente intermedio y 98.6 % del componente pesado por el fondo. La Tabla 6.1 muestra los datos de la mezcla.

Tabla 6.1: Mezcla ternaria del Caso 1

	ESI	$\alpha_{AB}$	$\alpha_{BC}$	F (lbmol)
n-butano	1.86	2.38	1.28	33
i-pentano				34
n-pentano				33

### 6.5.2 Caso 2

La segunda mezcla ternaria analizada es la mezcla n-pentano, n-hexano y n-heptano con una proporción molar en la alimentación de 40/20/40 (bajo contenido del componente intermedio). Esta mezcla fue reportada por Segovia Hernández (2004). Se desea obtener una composición de 98.7% del componente ligero en la corriente superior, 98 % del componente intermedio en la corriente intermedia y 98.6 % del componente pesado en la corriente inferior. La Tabla 6.2 presenta los datos de la mezcla.

Tabla 6.2: Mezcla Ternaria del Caso 2

	ESI	$\alpha_{AB}$	$\alpha_{BC}$	F (lbmol)
n-pentano	1.04	2.57	2.47	40
n-hexano				20
n-heptano				40

### 6.5.3 Caso 3

El tercer caso consiste en una mezcla de n-pentano, n-hexano y n-heptano con una composición de 15/70/15 (alta concentración del componente intermedio). Este caso se tomó de Segovia Hernández (2004). Las composiciones deseadas en los productos son: 98.7 % del componente ligero, 98 % del componente intermedio y 98.6 % del componente pesado. En la Tabla 6.3 se muestran los datos de la mezcla analizada.

Tabla 6.3: Mezcla Ternaria del Caso 3

	ESI	$\alpha_{AB}$	$\alpha_{BC}$	F (lbmol)
n-pentano	1.04	2.57	2.47	15
n-hexano				70
n-heptano				15

## 6.6 Análisis de resultados

El diseño (la selección del número de etapas y la selección de las etapas de las corrientes de reciclaje de cada tipo de columna) se realizó con el método de Hernández y Jiménez (1996, 1999a). Una vez que se establecen las especificaciones de diseño queda disponible un grado de libertad para los sistemas con columnas laterales y dos grados de libertad para la secuencia Petlyuk. Se optimiza entonces el flujo de vapor de interconexión para la secuencia STAD, el flujo de interconexión de líquido para la columna STAI, o ambos flujos de interconexión para la secuencia Petlyuk hasta obtener el menor consumo de energía, logrando las composiciones deseadas en los productos. Una vez que se tiene el diseño se

optimiza para obtener el menor consumo de energía. La optimización se realizó con simulaciones rigurosas empleando Aspen plus como herramienta.

Ya que se hicieron todas las simulaciones rigurosas en estado estable se procedió a realizar el análisis de las respuestas dinámicas de las secuencias optimizadas.

Para cada secuencia térmica se utilizaron tres lazos de control seleccionados en base a consideraciones de operación. Para la STAD se seleccionaron como variables manipulables el reflujo del destilado 1 (R1), el reflujo del destilado 2 (R2) y la carga térmica (QR1). Para la STAI se seleccionaron como variables manipulables el reflujo del destilado (R1), la carga térmica de la columna 1 (QR1) y la carga térmica de la columna 2 (QR2). Para la secuencia Petlyuk se seleccionaron como variable manipulable el reflujo (R1), el flujo de extracción lateral (LS) y la carga térmica (QR1).

La simulación dinámica se realizó primero a lazo abierto, haciendo perturbaciones en las variables manipulables de cada una de las secuencias diseñadas. Las simulaciones dinámicas se realizaron en Aspen Dynamics. Se realizaron perturbaciones en las variables manipulables del 1% de su valor, evitando con ello que se desestabilizara el sistema y observando así su comportamiento dinámico.

Como ejemplo de las respuestas a lazo abierto, en las figuras 6.2 a 6.4 se muestran las respuestas de la secuencia Petlyuk a lazo abierto para el Caso 2, para cambios escalón en las variables manipulables.

La Figura 6.2 muestra la respuesta para un cambio escalón para el reflujo (R) de la secuencia Petlyuk para el Caso 2. Se puede ver que la fracción en el destilado de n-pentano aumenta. También, la fracción de n-hexano en la salida lateral aumenta, mientras que la fracción de n-heptano en los fondos disminuye en menor proporción al aumento de las fracciones de n-pentano y n-hexano. Esto se debe a que los flujos de destilado y fondos son aproximadamente del mismo valor, mientras que el flujo en la salida lateral es la mitad, ocasionando que n-pentano y n-hexano tengan ganancias positivas mayores a la ganancia negativa que el n-heptano para el cambio en el reflujo.

La Figura 6.3 muestra la respuesta para un cambio escalón en la extracción lateral (LS) de la secuencia Petlyuk para el Caso 2. Se puede ver que el cambio en LS ocasiona poco cambio en la fracción en el destilado de n-pentano y en la fracción de n-heptano en los

---

fondos, mientras que la fracción de n-hexano disminuye en mayor proporción. Las ganancias de n-pentano y n-heptano son muy pequeñas porque el efecto de la variable manipulable LS es muy pobre, mientras que la variable LS tiene un mayor efecto en la composición de n-hexano en la salida lateral.

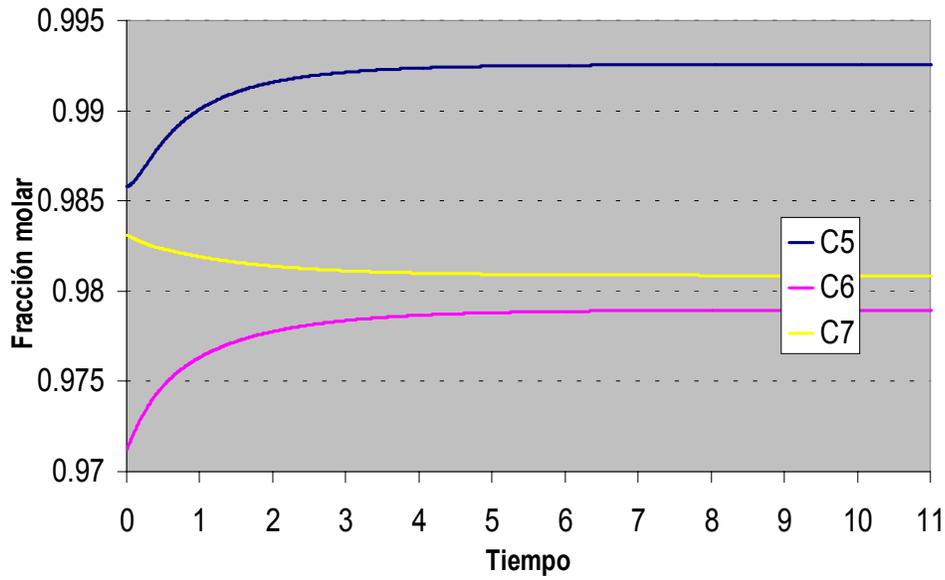


Figura 6.2: Respuesta en la Petlyuk, Caso 2, para un cambio en el reflujo (R)

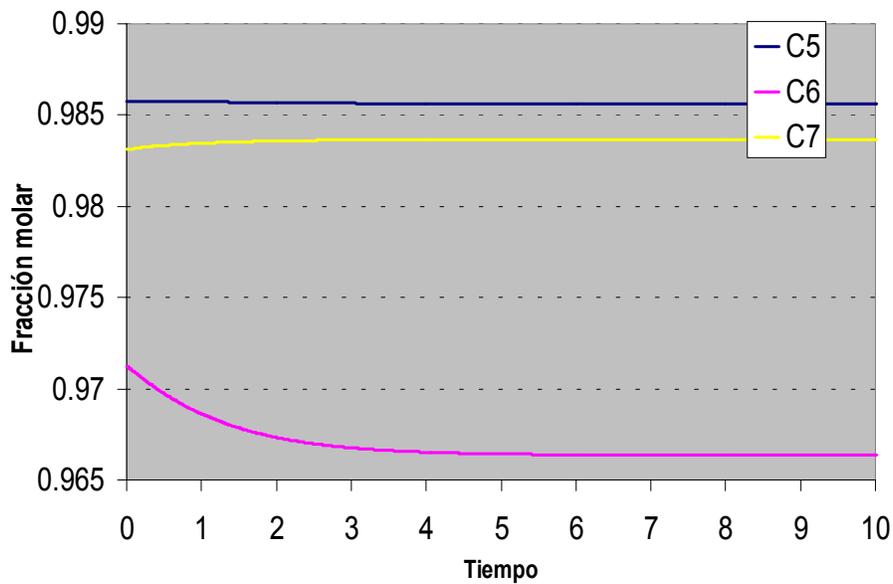


Figura 6.3: Respuesta en la Petlyuk, Caso 2, para un cambio en la salida lateral (LS)

La Figura 6.4 muestra la respuesta que se obtiene en la secuencia Petlyuk a un cambio escalón en la carga térmica ( $Q$ ) para el Caso 2. Se observa que la fracción en el destilado de n-pentano disminuye, pero la fracción de n-hexano en la salida lateral disminuye en una mayor proporción, mientras que la fracción de n-heptano en el fondo aumenta muy poco. Es decir, la variable  $Q$  tiene una fuerte influencia negativa en el n-hexano, una menor influencia negativa en n-pentano y una pequeña influencia positiva en el n-heptano.

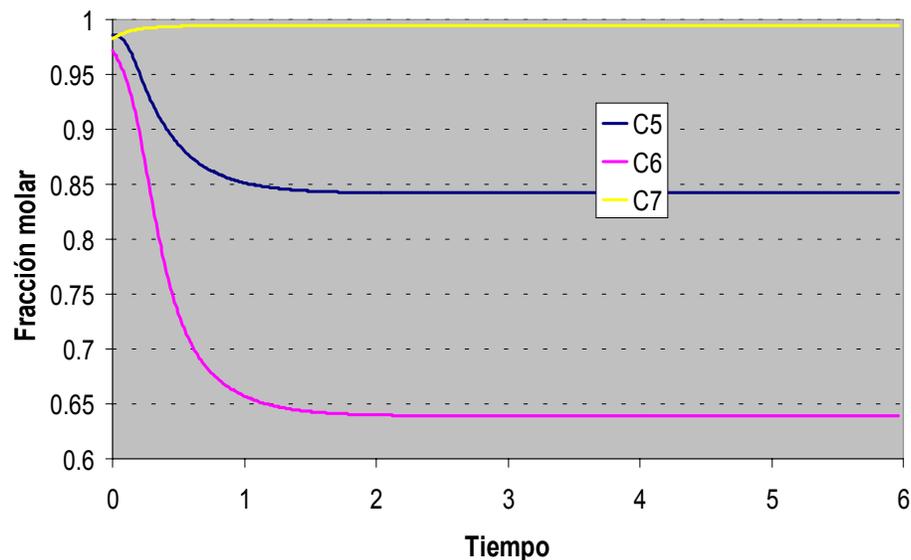


Figura 6.4: Respuesta en la Petlyuk, Caso 2, para un cambio en la carga térmica ( $Q$ )

Las respuestas dinámicas a lazo abierto se ajustaron a funciones de transferencia en el dominio de Laplace para obtener la matriz de transferencia que representa tales respuestas. Levien y Morari (1987) ajustaron respuestas experimentales de las secuencias térmicamente acopladas a funciones de transferencia para realizar la descomposición en valores singulares. En otros casos se han ajustado las respuestas dinámicas obtenidas por simulaciones rigurosas (por ejemplo Hernández y Jiménez, 1999b).

En el presente trabajo las respuestas se ajustaron a modelos de primer orden con o sin tiempo muerto, modelos de segundo con o sin tiempo muerto, y las respuestas inversas se ajustaron a funciones de transferencia de primer orden en competencia con o sin tiempo muerto (ver Tabla 6.4). Los ajustes de las funciones de transferencia se realizaron empleando la técnica de los mínimos cuadrados.

Tabla 6.4: Tipos de funciones de transferencia consideradas

Primer orden	$\frac{k_p}{\tau_I s + 1}$	$\frac{k_p e^{-Ds}}{\tau_I s + 1}$
Segundo orden	$\frac{k_p}{(\tau_I s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{k_p e^{-Ds}}{(\tau_I s + 1)(\tau_2 s + 1)}$
Primer orden en competencia	$\frac{k_{p1}}{\tau_{I1} s + 1} - \frac{k_{p2}}{\tau_{I2} s + 1}$	$\frac{k_{p1} e^{-D_1 s}}{\tau_{I1} s + 1} - \frac{k_{p2} e^{-D_2 s}}{\tau_{I2} s + 1}$

Una vez que se obtienen las funciones de transferencia es necesario escalar las ganancias obtenidas, lo cual es importante ya que la descomposición de valores singulares es dependiente de las unidades empleadas en las variables manipulables. En el presente trabajo las ganancias se escalaron empleando la técnica propuesta por Hernández (1998) en el que se considera que el máximo valor de la variable manipulable es el doble de su valor nominal.

De las tablas 6.5 a 6.7 se presentan las matrices de funciones de transferencia para cada una de las secuencias en el Caso 1. Las tablas 6.8 a 6.10 muestran las matrices de transferencia del Caso 2. Las matrices de transferencia correspondientes al Caso 3 se presentan en las tablas 6.11 a 6.13.

Tabla 6.5: Matriz de funciones de transferencia para STAD Caso 1

	R1	QR1	R2
XD1	$\frac{3.483}{2.5s + 1}$	$\frac{-3.412}{1.75s + 1}$	$\frac{-1.15}{1.45s + 1}$
XB1	$\frac{-0.547}{2.6s + 1}$	$\frac{1.605}{3.0s + 1}$	$\frac{-1.685}{8.0s + 1}$
XD2	$\frac{1.784}{10s + 1} - \frac{0.643}{1.25s + 1}$	$\frac{-8.523}{(7.78s + 1)(2.59s + 1)}$	$\frac{5.179}{(8.31s + 1)(2.07s + 1)}$

Tabla 6.6: Matriz de funciones de transferencia para STAI Caso 1

	R1	QR1	QR2
XD1	$\frac{5.997}{1.25s + 1}$	$\frac{-4.1542}{0.95s + 1}$	$\frac{-0.9085}{s + 1}$
XB1	$\frac{-0.3227}{1.75s + 1}$	$\frac{0.5095}{0.4s + 1} - \frac{0.2787}{1.75s + 1}$	$\frac{0.0324}{1.5s + 1}$
XB2	$\frac{10.0809}{(7.47s + 1)(0.83s + 1)}$	$\frac{-4.6209}{(7.98s + 1)(1.089s + 1)}$	$\frac{4.7153}{(7.067s + 1)(2.355s + 1)}$

Tabla 6.7: Matriz de funciones de transferencia para Petlyuk Caso 1

	R	QR	LS
XD	$\frac{4.164}{1.45s + 1}$	$\frac{-4.68}{0.8s + 1}$	$\frac{0.28}{s + 1}$
XB	$\frac{-2.624}{(6.994s + 1)(0.2058s + 1)}$	$\frac{1.96}{(4.662s + 1)(0.1372s + 1)}$	$\frac{0.348}{8s + 1}$
XS	$\frac{1.736}{2.5s + 1}$	$\frac{-2.36}{8s + 1}$	$\frac{-0.94}{8s + 1}$

Tabla 6.8: Matriz de funciones de transferencia para STAD Caso 2

	R1	QR	R2
XD1	$\frac{1.52067}{0.771s + 1}$	$\frac{18.7513}{7.082s + 1} - \frac{3.17177}{0.2472s + 1}$	$\frac{-3.236e^{-0.26s}}{1.955s + 1}$
XB1	$\frac{-2.41589}{(1.4286s + 1)(0.779s + 1)}$	$\frac{0.8578}{0.182s + 1} - \frac{11.2109}{7.337s + 1}$	$\frac{1.305458}{(0.8932s + 1)(0.9065s + 1)}$
XD2	$\frac{-12.4627e^{-1.2s}}{(0.9196s + 1)(0.99s + 1)}$	$\frac{9.29589}{5.917s + 1}$	$\frac{-0.34621}{1.02277s + 1}$

Tabla 6.9: Matriz de funciones de transferencia para STAI Caso 2

	R1	QR1	QR2
XD1	$\frac{2.22679}{0.7733s + 1}$	$\frac{-4.16229}{0.7314s + 1}$	$\frac{-1.020043}{0.8369s + 1}$
XB1	$\frac{-2.7285}{1.9361s + 1}$	$\frac{0.184}{0.16s + 1} - \frac{1.1416}{1.54s + 1}$	$\frac{1.10766}{1.468s + 1}$
XB2	$\frac{0.42695}{2.95s + 1} - \frac{0.5755}{0.25s + 1}$	$\frac{1.31732}{0.4s + 1}$	$\frac{-0.996e^{-0.3s}}{1.8456's + 1}$

Tabla 6.10: Matriz de funciones de transferencia para Petlyuk Caso 2

	R	QR	LS
XD	$\frac{2.2555}{1.037s + 1}$	$\frac{-3.14457}{0.4498s + 1}$	$\frac{-0.05357}{(0.71435s + 1)(1.4083s + 1)}$
XB	$\frac{2.5645}{0.97s + 1}$	$\frac{-7.25798}{0.4348s + 1}$	$\frac{-1.61588}{1.279s + 1}$
XS	$\frac{-0.744}{1.33s + 1}$	$\frac{0.26216}{0.19s + 1}$	$\frac{0.19167}{1.0525s + 1}$

Tabla 6.11: Matriz de funciones de transferencia para STAD Caso 3

	R1	QR1	R2
XD1	$\frac{2.5304}{1.3018s + 1}$	$\frac{7.2593}{2.5s + 1} - \frac{3.6937}{0.3s + 1}$	$\frac{-39.289e^{-1.6s}}{(3.166s + 1)(1.324s + 1)}$
XB1	$\frac{0.70615}{1.73s + 1} - \frac{0.07825}{0.15s + 1}$	$\frac{0.2}{0.1s + 1} - \frac{8.3527}{2.5s + 1}$	$\frac{-3.6031}{3.1s + 1}$
XD2	$\frac{-67.1359e^{-2.5s}}{1.6463s + 1}$	$\frac{1.06933}{0.78s + 1}$	$\frac{-23.29744}{(2.6376s + 1)(1.29715s + 1)}$

Tabla 6.12: Matriz de funciones de transferencia para STAI Caso 3

	R1	QR1	QR2
XD1	$\frac{2.55767}{0.534s + 1}$	$\frac{-4.226}{5.73s + 1}$	$\frac{-20.14956}{3.573s + 1}$
XB1	$\frac{-3.096}{1.188s + 1}$	$\frac{1.10493}{6.0385s + 1}$	$\frac{2.62552}{1.62s + 1}$
XB2	$\frac{0.937}{0.332s + 1} - \frac{1.97133}{3.855s + 1}$	$\frac{0.5060}{0.128s + 1} - \frac{0.45103668}{6.336s + 1}$	$\frac{-1.7994}{2.95s + 1}$

Tabla 6.13: Matriz de funciones de transferencia para Petlyuk Caso 3

	R	QR	LS
XD	$\frac{3.71811}{0.8944s + 1}$	$\frac{-5.28167}{0.5791s + 1}$	$\frac{-0.16033}{4.0198s + 1}$
XB	$\frac{0.407}{0.162s + 1} - \frac{0.5897}{3.55s + 1}$	$\frac{-0.88567}{0.9664s + 1}$	$\frac{-1.61533}{3.476s + 1}$
XS	$\frac{-2.5497}{1.336s + 1}$	$\frac{1.27033}{0.6915s + 1}$	$\frac{1.75133}{2.9575s + 1}$

Una vez que se cuenta con las matrices de funciones de transferencia de las diferentes secuencias es posible realizar la descomposición en valores singulares haciendo un barrido en la frecuencia (ver Sección 6.2). La SVD se realizó utilizando Matlab como herramienta. En la SVD se debe de buscar el sistema con los mayores valores singulares mínimos y los menores números de condición, ya que se espera que dichos sistemas presenten los mejores desempeños dinámicos bajo el control retroalimentado.

La Figura 6.5 muestra los valores singulares mínimos para el Caso 1. Se observa que las secuencias STAD y Petlyuk a bajas frecuencias tienen los valores más altos, pero alrededor de la frecuencia de corte la secuencia STAD tiene un mínimo no deseable; esto indica problemas de desempeño cuando se cierre el lazo. El valor de la frecuencia de corte es

el inverso de la constante de tiempo del proceso. La secuencia STAI tiene valores bajos en frecuencias bajas, pero alrededor de la frecuencia de corte aumenta su valor hasta un máximo, mayor a las otras secuencias.

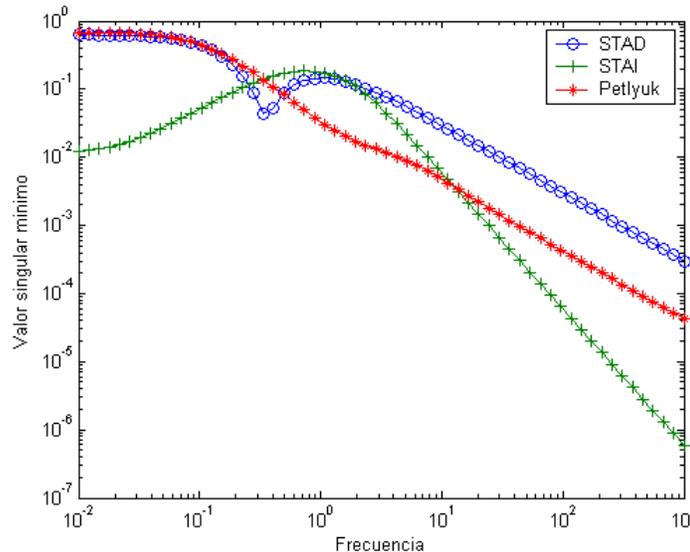


Figura 6.5: Valores singulares mínimos para el Caso 1

La Figura 6.6 muestra el número de condición para el Caso 1. Las secuencias STAD y Petlyuk muestran los menores números de condición a frecuencias bajas; sin embargo, la STAD presenta un máximo alrededor de la frecuencia de corte, lo cual no es deseable. La STAI presenta valores altos a bajas frecuencias, pero alrededor de la frecuencia de corte presenta un mínimo.

Para el control retroalimentado los valores singulares más importantes están en la frecuencia de corte (el inverso de la constante de tiempo del proceso a lazo abierto). Alrededor de la frecuencia de corte la secuencia STAI presenta los mejores valores, la secuencia Petlyuk seguiría, y la secuencia STAD presenta máximo y mínimo indeseables.

La Figura 6.7 muestra los valores singulares mínimos que se obtienen para todas las secuencias en el Caso 2. Puede verse que a bajas frecuencias la secuencia STAD tiene los valores singulares mínimos más grandes, seguida de la secuencia STAI, mientras que la secuencia Petlyuk tiene los valores más bajos. A altas frecuencias las secuencias STAD y

STAI comienzan a oscilar debido a la presencia de tiempos muertos en las matrices de las funciones de transferencia.

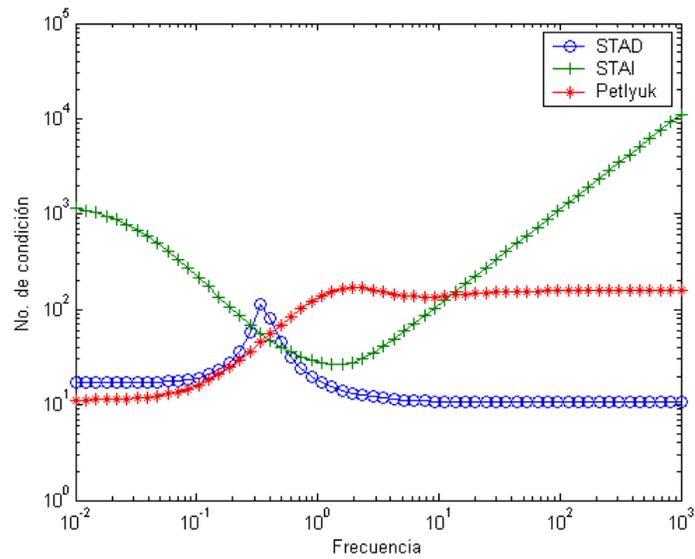


Figura 6.6: Número de condición para el Caso 1

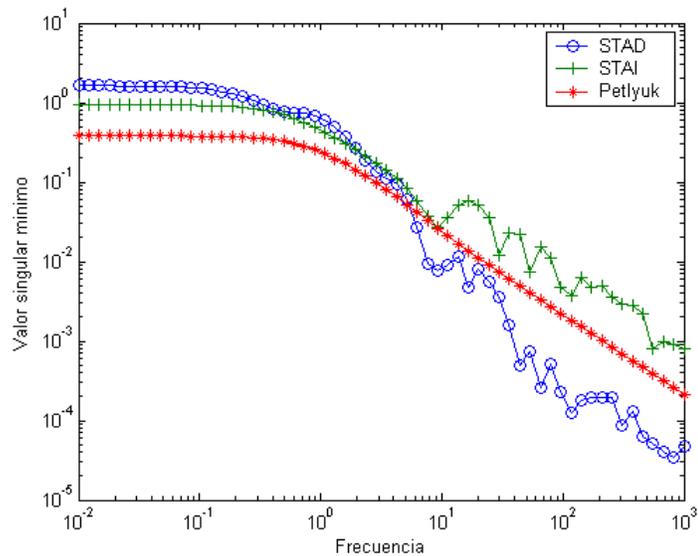


Figura 6.7: Valores singulares mínimos para el Caso 2

La Figura 6.8 muestra los números de condición al hacer un barrido en la frecuencia, para las tres secuencias en el Caso 2. La secuencia Petlyuk cuenta con los números de condición más altos. La secuencia STAI presenta los menores números de condición, pero a frecuencias altas presenta altibajos debidos a los tiempos muertos de la matriz de transferencia. Las secuencias STAD y STAI presentan muchas oscilaciones debidas a los tiempos muertos presentes en las funciones de transferencia del sistema. En la frecuencia de corte la secuencia STAD presenta un máximo no deseado.

Se esperaría que la mejor respuesta dinámica se obtenga en la secuencia STAI. La secuencia STAD tiene mejores valores que la secuencia Petlyuk a bajas frecuencia, pero no ocurre lo mismo en la frecuencia de corte.

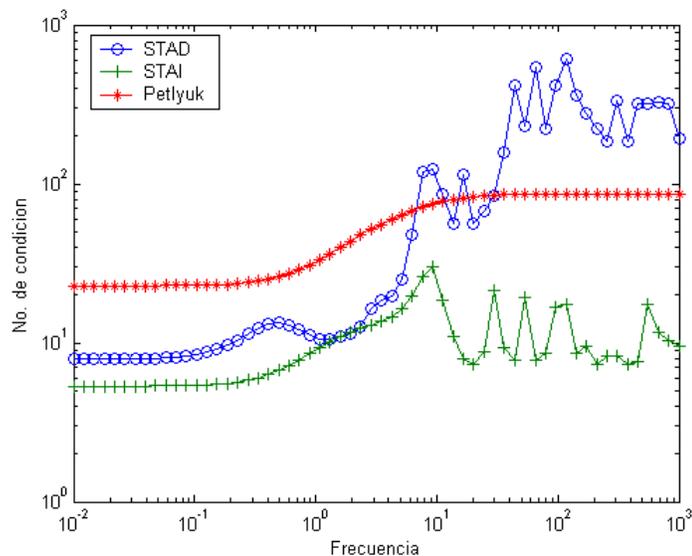


Figura 6.8: Número de condición para el Caso 2

La Figura 6.9 muestra los valores singulares mínimos en el Caso 3, para todas las secuencias. Se observa que a frecuencias bajas la secuencia STAD tiene los valores singulares mínimos más grandes, y le sigue la secuencia Petlyuk. La secuencia STAI presenta los valores singulares mínimos más pequeños a bajas frecuencias, pero aumentan a altas frecuencias. A frecuencias alrededor de la frecuencia de corte la secuencia STAD presenta un mínimo no deseado, ya que indica problemas de dinámica a lazo cerrado.

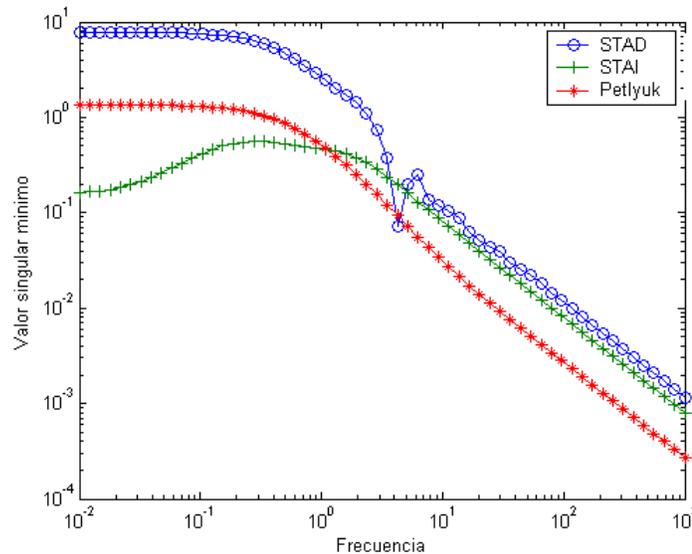


Figura 6.9: Valores singulares mínimos para el Caso 3

La Figura 6.10 muestra los números de condición, al hacer un barrido en la frecuencia, para las tres secuencias en el Caso 3. Se puede ver que a bajas frecuencias la secuencia STAI cuenta con los números de condición más altos, que bajan a frecuencias altas hasta ser los menores. La secuencia Petlyuk presenta los menores números de condición a frecuencias bajas, pero aumentan a altas frecuencias, mientras que la secuencia STAD presenta un máximo no deseado alrededor de la frecuencia de corte.

De acuerdo a los resultados se esperaría que para el Caso 3 la secuencia Petlyuk presentara los mejores desempeños dinámicos lazo cerrado, seguido de la secuencia STAD y el peor desempeño lo tendría la secuencia STAD.

El siguiente paso del análisis consistió en cerrar los tres lazos de control simultáneamente, para después calcular y comparar el desempeño dinámico y el margen de robustez. Para los controladores PI y PII<sup>2</sup> existen 6 parámetros a sintonizar, que corresponden 2 a cada lazo de control. En el caso del controlador IMC existe un solo parámetro de sintonización para toda la secuencia.

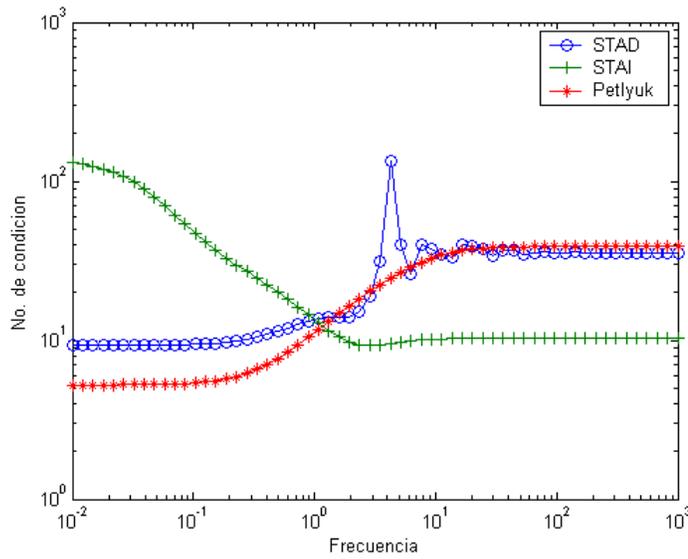


Figura 6.10: Número de condición para el Caso 3

Para ajustar los parámetros de los controladores se minimizó la suma de los errores de las respuestas de las tres variables a controlar, para los cambios escalón aplicados en las tres variables controladas. Los cambios escalón realizados en las composiciones (variables manipulables) fueron de 0.1. Al realizar cambios pequeños, las desviaciones con respecto al set point son pequeñas, por lo que se utilizó el integral del error absoluto (IAE) como criterio a minimizar. El criterio del IAE es mejor para suprimir errores pequeños que el integral del error al cuadrado (ISE), ya que al elevar al cuadrado una cantidad pequeña se vuelve más pequeña, sirviendo más para eliminar errores grandes.

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt = \int_0^{\infty} |y_{sp}(t) - y(t)| dt \quad 6.19$$

$$\min \text{ Error} = (IAE_{L1} + IAE_{L2} + IAE_{L3}) \quad 6.20$$

Las respuestas de los tres casos de estudio, para las tres secuencias y los tres tipos de controladores, se comparan en su desempeño empleando como criterio el IAE, y en su robustez empleando como criterio el margen de robustez.

Como ejemplo del tipo de respuestas que se obtienen en las secuencias térmicas se presentan, de la Figura 6.11 a la Figura 6.19, las respuestas dinámicas del Caso 1. Para las

tres secuencias (STAD, STAI y Petlyuk) se presentan los resultados de los controladores PI,  $PII^2$  e IMC, previamente sintonizados minimizando la suma de los errores.

La Figura 6.11 muestra la respuesta de la composición de pentano en la secuencia STAD para el Caso 1 empleando los tres controladores. Se hicieron perturbaciones en el set point de 0.1. Se observa un gran sobretiro en la respuesta dinámica del controlador  $PII^2$ , además de algunas oscilaciones antes de estabilizarse. La respuesta del controlador PI tiene un pequeño sobretiro pero sin oscilaciones. El controlador IMC presenta la mejor respuesta dinámica ya que es la más rápida en llegar al set point y sin sobretiro.

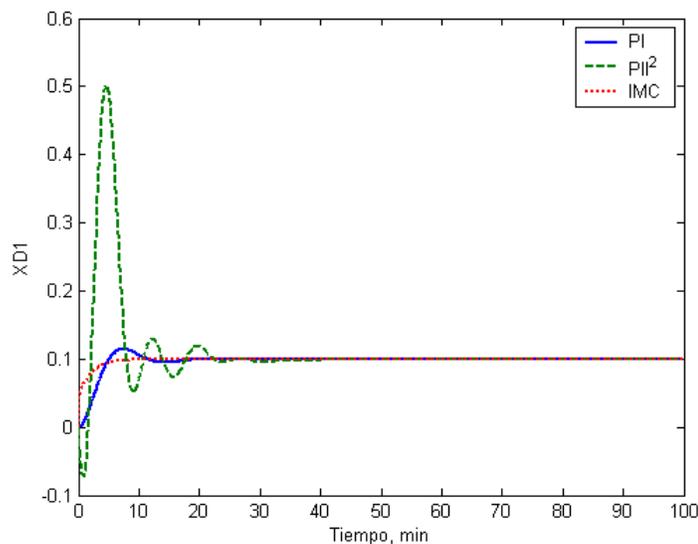


Figura 6.11: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado para la secuencia STAD, Caso 1

En la Figura 6.12 se muestra la respuesta dinámica del hexano en el rectificador lateral de la secuencia STAD para el Caso 1. Se puede ver que la respuesta dinámica del hexano con el controlador IMC es muy rápida y sin oscilaciones; este es el controlador que presenta el mejor desempeño dinámico. Por otro lado, al emplear el controlador PI se obtiene una respuesta inversa, además de varias oscilaciones antes de estabilizarse. Con el controlador  $PII^2$  se obtiene el peor desempeño dinámico con una respuesta inversa grande y un comportamiento oscilatorio antes de poder estabilizarse.

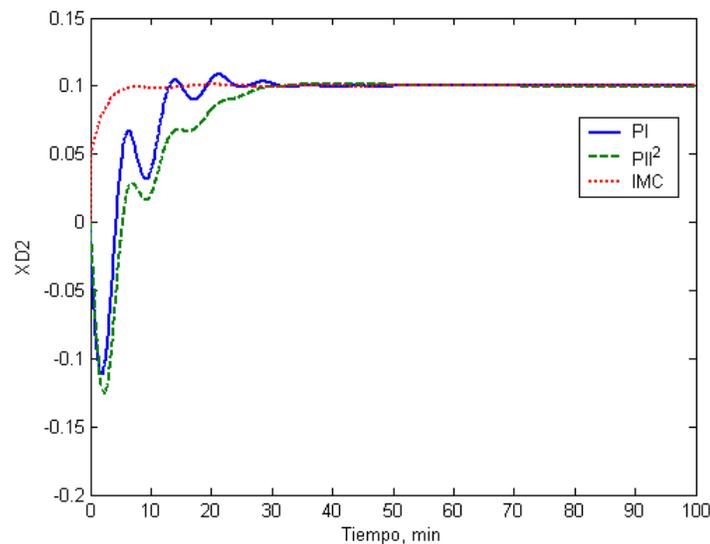


Figura 6.12: Respuestas dinámicas de la composición en el rectificador lateral para la secuencia STAD, Caso 1

En la Figura 6.13 se reporta la respuesta dinámica de la composición en los fondos para la secuencia STAD en el Caso 1. Se observa un gran sobretiro y muchas oscilaciones en la respuesta de la composición del heptano al emplear el controlador PI. Con este controlador se obtiene el mayor error, es decir, el peor desempeño dinámico. La respuesta del controlador PII<sup>2</sup> tiene un error menor que el controlador PI, pero presenta un sobretiro y oscilaciones antes de llegar a estabilizarse. Finalmente, la respuesta dinámica del controlador IMC tiene el mejor desempeño, por ser la más rápida y no presentar sobretiro.

Al comparar los desempeños de los controladores en las tres variables controladas para la secuencia STAD, en general el mejor desempeño lo presenta el controlador IMC, seguido del controlador PI, mientras que el peor desempeño lo tiene el controlador PII<sup>2</sup>.

La respuesta de la composición en el destilado para la secuencia STAI, en el Caso 1, se muestra en la Figura 6.14. En este caso la respuesta dinámica del destilado al emplear el controlador PI tiene una respuesta sin sobretiro que alcanza el set point rápidamente. Al emplear el controlador PII<sup>2</sup> la respuesta presenta un pequeño sobretiro; con este controlador se obtiene el peor desempeño dinámico. La respuesta de la composición con el controlador

IMC es rápida y sin sobretiro, pero es un poco más lenta en alcanzar el set point que el controlador PI.

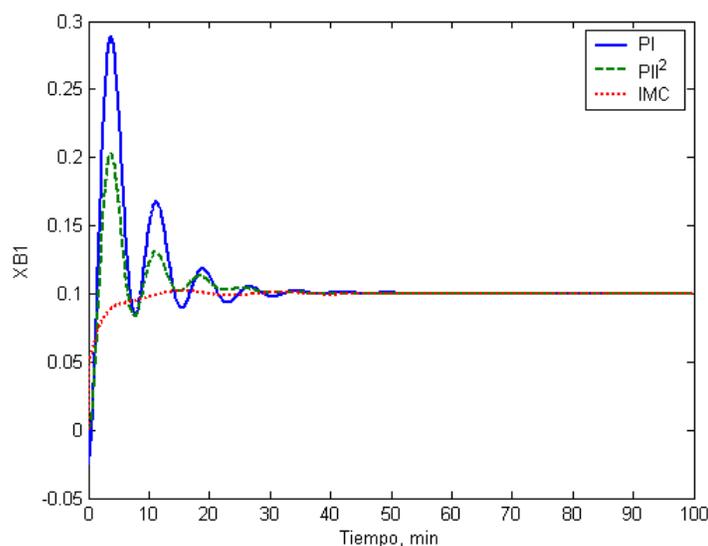


Figura 6.13: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia STAD, Caso 1

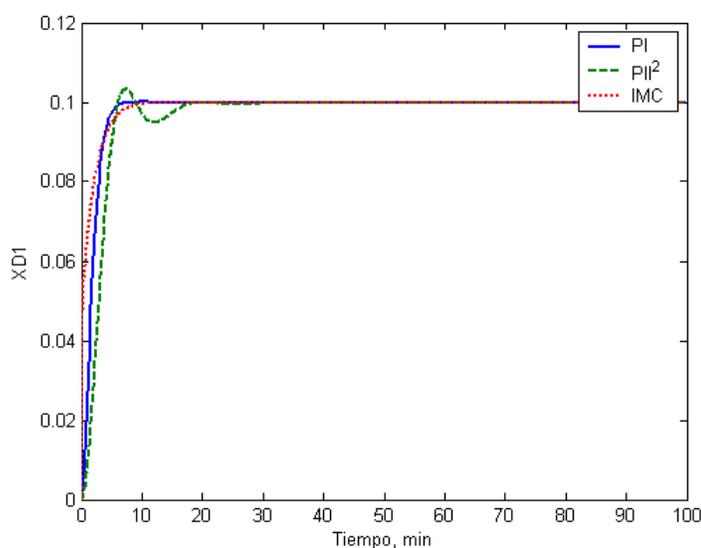


Figura 6.14: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado para la secuencia STAI, Caso 1

Los resultados de la fracción molar del hexano en el agotador lateral de la secuencia STAI para el Caso 1 se presentan en la Figura 6.15. Se puede ver que la respuesta de la fracción molar del componente intermedio con los tres controladores es bastante similar, relativamente rápida y sin oscilaciones.

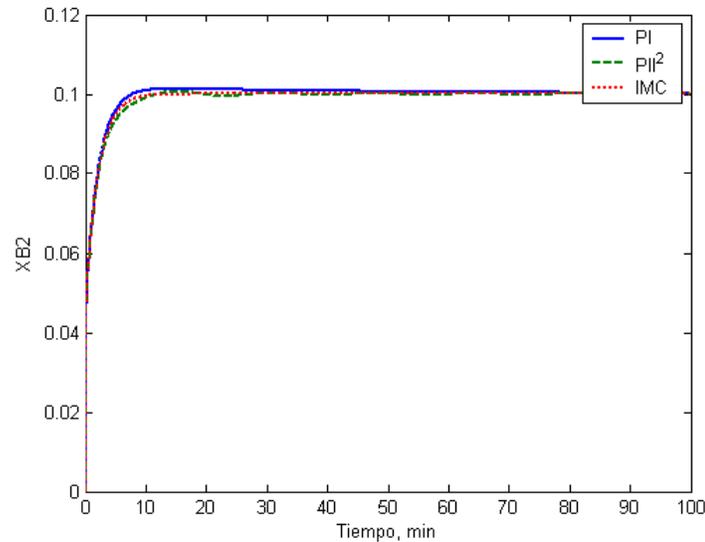


Figura 6.15: Respuestas dinámicas de la composición en el agotador lateral para la secuencia STAI, Caso 1

La Figura 6.16 presenta la respuesta de la composición de heptano en los fondos para la secuencia STAI en el Caso 1. El comportamiento de la fracción en los fondos con el controlador PI tiene un sobretiro y presenta algunas oscilaciones. La respuesta al emplear el controlador  $PII^2$  es similar al controlador PI, pero con un sobretiro más pequeño. La respuesta con el controlador IMC es rápida y sin sobretiros, por lo que con este controlador se obtiene la mejor respuesta dinámica.

Los resultados de la composición en el destilado secuencia Petlyuk al emplear los tres controladores en el Caso 1 se presentan en la Figura 6.17. Claramente se ve que la respuesta dinámica al emplear el controlador PI es muy rápida, obteniéndose el mejor desempeño dinámico. Con el controlador  $PII^2$  se obtiene un sobretiro, pero la respuesta es muy rápida. El

controlador IMC proporciona una respuesta sin sobretiros, aunque en este caso es la más lenta en alcanzar el set point.

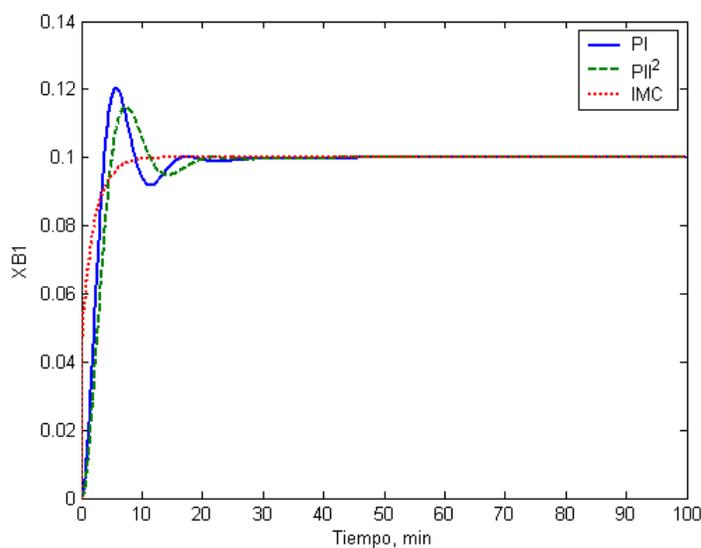


Figura 6.16: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia STAI, Caso 1

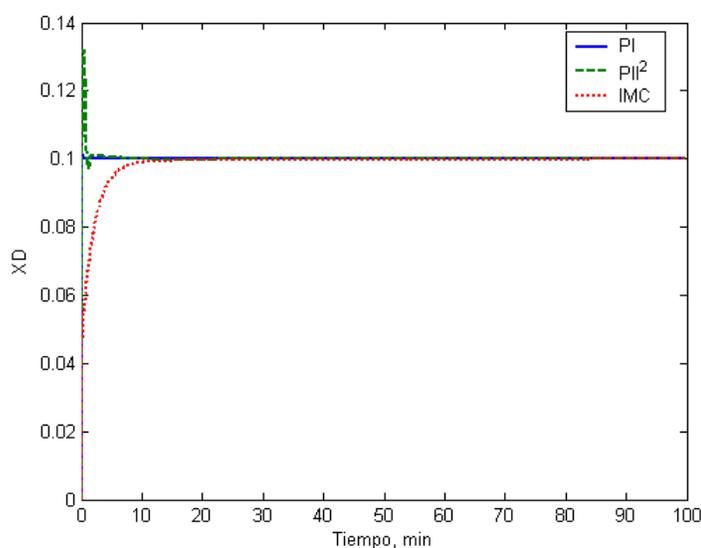


Figura 6.17: Respuestas dinámicas de la composición en el destilado de la secuencia Petlyuk, Caso 1

La Figura 6.18 muestra el resultado de aplicar los tres controladores en la composición de la extracción lateral para la secuencia Petlyuk, Caso 1. Para este caso la respuesta dinámica de la fracción en la salida lateral con el controlador PI tiene un comportamiento inverso, sobretiro y algunas oscilaciones. La composición con el controlador  $PII^2$  presenta una respuesta inversa y un sobretiro menores a los mostrados por el controlador PI. Por otro lado, al emplear el controlador IMC la composición tiene una respuesta sin sobretiros y más rápida que con los otros controladores. En este caso, el desempeño obtenido al emplear el controlador IMC es muy superior al obtenido empleando los controladores PI o  $PII^2$ .

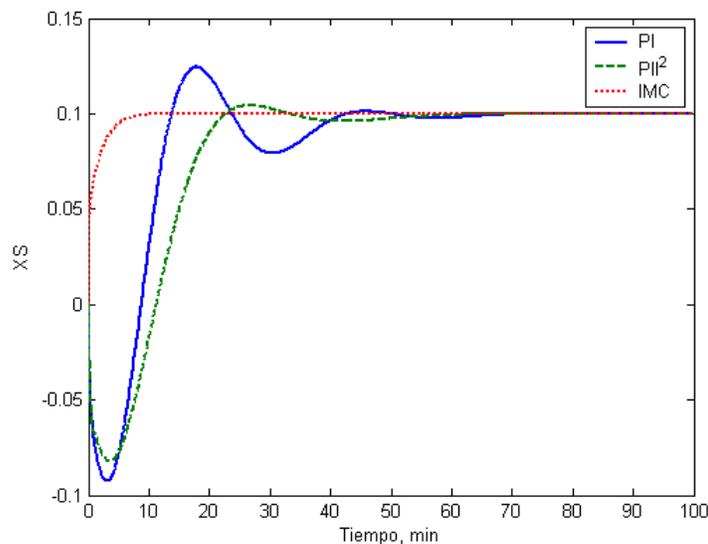


Figura 6.18: Respuestas dinámicas de la composición en la extracción lateral para la secuencia Petlyuk, Caso 1

El resultado de aplicar los tres controladores a la composición en los fondos para la secuencia Petlyuk se muestra en la Figura 6.19. Se ve que la respuesta dinámica de la composición en los fondos al emplear el controlador PI presenta un pequeño sobretiro, pero no tiene oscilaciones. Con el controlador  $PII^2$  se tiene la respuesta más rápida de los controladores, aunque con un sobretiro. Con el controlador IMC se obtiene una respuesta dinámica sin sobretiro y más rápida a la obtenida con el controlador PI.

En general, para las tres secuencias térmicas al emplear el controlador IMC se obtuvieron mejores comportamientos dinámicos a los obtenidos con los controladores PI o los controladores  $PII^2$ .

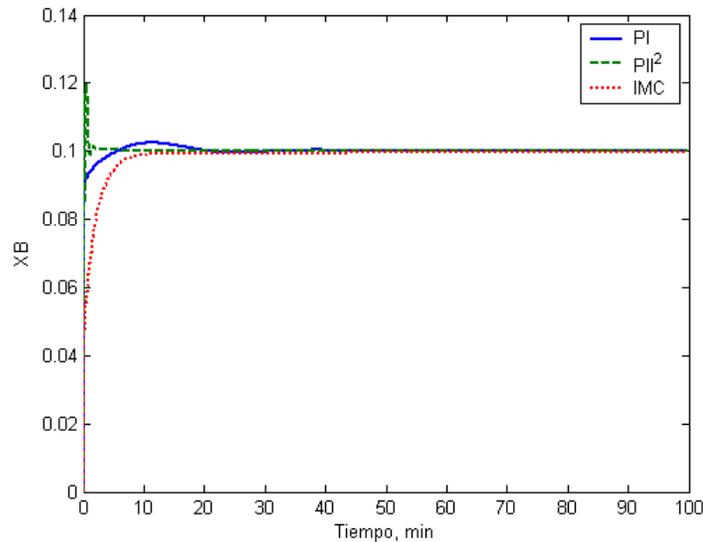


Figura 6.19: Respuestas dinámicas de la composición en los fondos para la secuencia Petlyuk, Caso 1

Los resultados del margen de robustez y del integral del error absoluto (IAE) para las tres composiciones de todas las secuencias (STAD, STAI y Petlyuk) empleando los tres tipos de controladores (PI,  $PII^2$  e IMC) en los tres casos de estudio se resumen de la Figura 6.20 a la Figura 6.25.

La Figura 6.20 presenta los resultados del margen de robustez al emplear los diferentes controladores en los tres casos de estudio para la secuencia STAD. Se observa que en los casos 1 y 2 el controlador PI ligeramente superior al obtenido con el controlador IMC, y muy superior con respecto al controlador  $PII^2$ . Sin embargo, en el Caso 3 el mayor margen de robustez se logra con el controlador  $PII^2$ , seguido del controlador PI y finalmente del controlador IMC.

Los resultados de la secuencia STAI se resumen en la Figura 6.21. En el Caso 1 el controlador IMC es el que presenta el mayor margen de robustez seguido del controlador PI,

mientras que con el  $PII^2$  se obtiene la menor robustez. En el Caso 2 la mayor robustez la proporciona el controlador PI, seguido del  $PII^2$  y del IMC. En el Caso 3 se obtienen valores similares de robustez con los tres controladores.

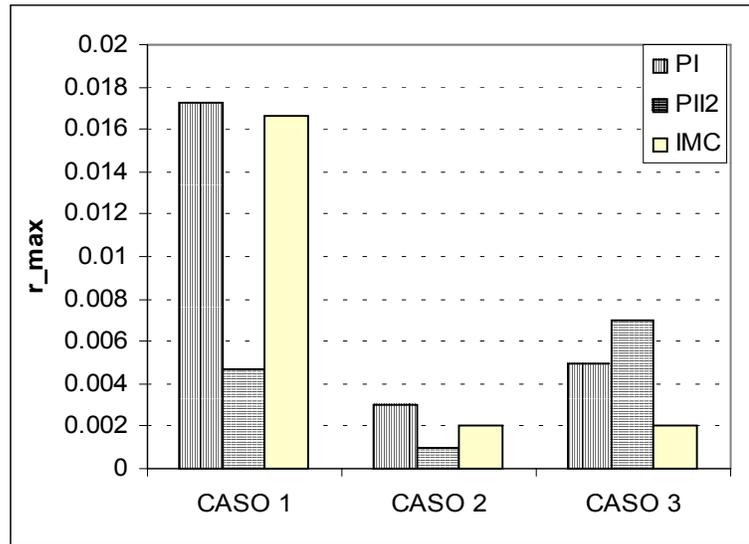


Figura 6.20: Resultados del margen de robustez para la secuencia STAD

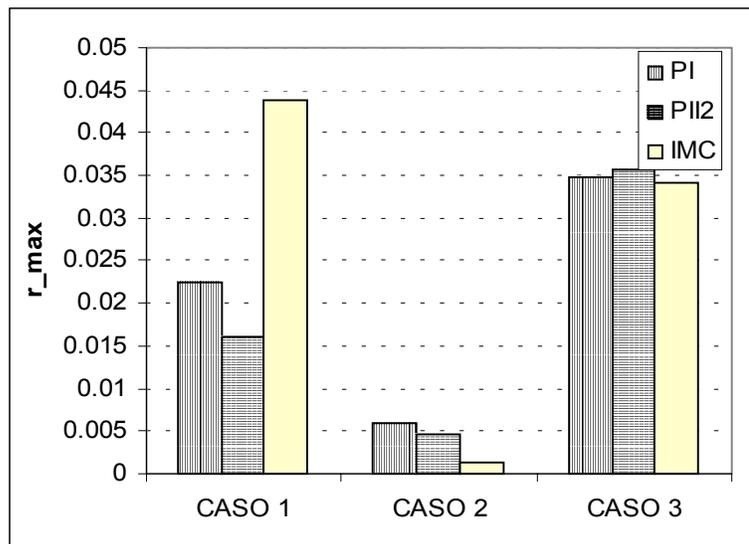


Figura 6.21: Resultados de robustez para la secuencia STAI

En la Figura 6.22 se reportan los resultados de la secuencia Petlyuk. En el Caso 1 el mayor margen de robustez se obtiene con el controlador PI, seguido del IMC, y luego el controlador PII<sup>2</sup>. En el Caso 2 el controlador IMC presenta el mayor margen de robustez, seguido del controlador PI y en último el PII<sup>2</sup>. Por otro lado, en el Caso 3 la mayor robustez la proporciona el controlador PI, luego el PII<sup>2</sup>, y con la menor robustez el controlador IMC.

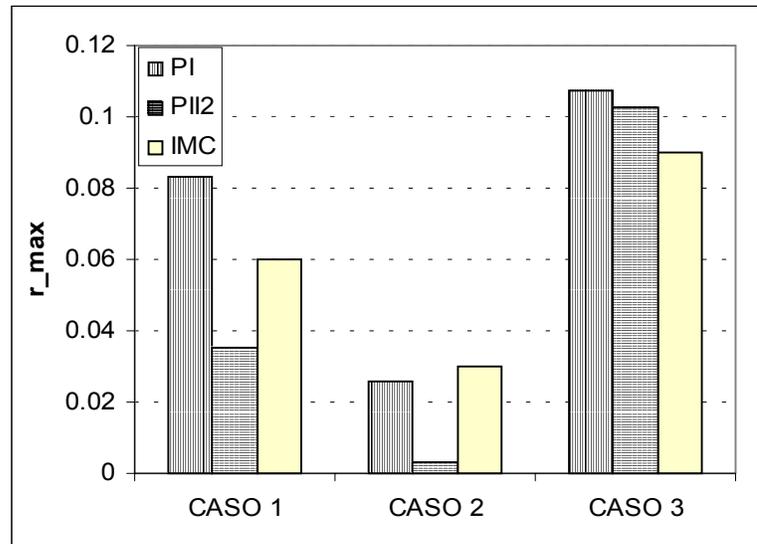


Figura 6.22: Resultados del margen de robustez para la secuencia Petlyuk

En general los resultados indican que las secuencias térmicas que emplearon el controlador IMC o los controladores PI tienen una robustez similar y mayor que las que utilizaron el controlador PII<sup>2</sup>. Para las tres secuencias, en el Caso 1, los controladores PI e IMC tienen un margen de robustez promedio igual a 4%, mientras el controlador PII<sup>2</sup> tiene un promedio de 2%. Para el Caso 2 los controladores PI e IMC presentan un promedio de 1.1%, y los controladores PII<sup>2</sup> un promedio de 0.3%. Los promedios del margen de robustez en el Caso 3 fueron: 4.9 % para los controladores PI, 4.8% para controladores PII<sup>2</sup> y 4.5% para el IMC. De acuerdo con los resultados anteriores el alto contenido del componente intermedio proporcionó los sistemas más robustos, mientras que el bajo contenido del componente intermedio generó los sistemas con la menor robustez, indicando que la presencia del componente intermedio beneficia la estabilidad robusta del sistema.

De los resultados obtenidos se puede observar que de las tres secuencias acopladas térmicamente la secuencia Peltyuk es la que tiene el mayor margen de robustez seguida de la secuencia STAI, y los menores márgenes de robustez los presentó la secuencia STAD, para los tres tipos de controladores empleados (PI, PII<sup>2</sup> e IMC).

Para complementar el análisis de robustez y ver si los sistemas también presentan un desempeño aceptable es necesario analizar el error de la respuesta. En esta parte del trabajo se utilizó el IAE como medida del desempeño dinámico.

La Figura 6.23 presenta los resultados del error en la secuencia STAD para los tres casos de estudio. Puede verse que para los tres casos de estudio los valores más grandes de IAE se obtienen con el controlador PII<sup>2</sup>, seguido del controlador PI, mientras que los menores errores se obtienen con el controlador IMC.

El resumen de resultados de IAE en la secuencia STAI se muestra en la Figura 6.24. Para los casos 1 y 2 el controlador PII<sup>2</sup> es el que presenta los mayores valores del IAE, seguido del PI, mientras que el controlador IMC tiene los menores. Sin embargo, en el Caso 3 los mayores errores se obtienen con el controlador PI, luego el controlador IMC, mientras que el controlador PII<sup>2</sup> produce los errores más pequeños.

La Figura 6.25 muestra los resultados de IAE para la secuencia Petlyuk. Para esta secuencia en los tres casos de estudio el mayor error se obtiene con el controlador PII<sup>2</sup>. El controlador IMC tiene el menor error para el Caso 1, mientras que el controlador PI tiene el mejor desempeño para el Caso 2. En el Caso 3 los controladores IMC y PI presentan un error similar.

De acuerdo a los resultados anteriores los sistemas con alto contenido del componente intermedio presentaron los mejores desempeños, mientras que las mezclas equimolares y de bajo contenido de componente intermedio tuvieron errores mayores.

En promedio para los tres casos de estudio el controlador IMC presenta el menor valor de IAE, seguido de los controladores PI y con el mayor error los controladores PII<sup>2</sup>; es decir que el mejor desempeño dinámico lo presenta el controlador IMC, seguido del controlador PI y el peor desempeño lo presentó el controlador PII<sup>2</sup>.

---

Los resultados para los tres tipo de controladores muestran que la secuencia STAI tiene el mejor desempeño dinámico ya que los valores del IAE fueron los menores, seguido de la secuencia STAD, mientras que el peor desempeño dinámico lo tiene la secuencia Petlyuk.

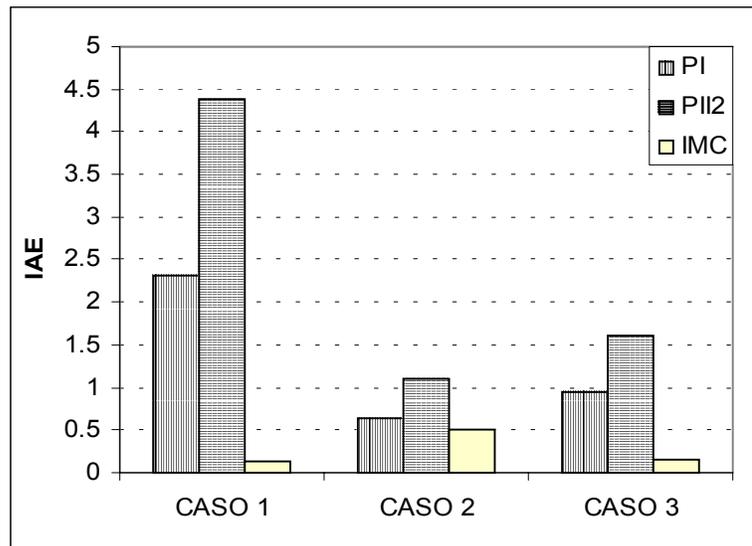


Figura 6.23: Resultados de IAE para la secuencia STAD

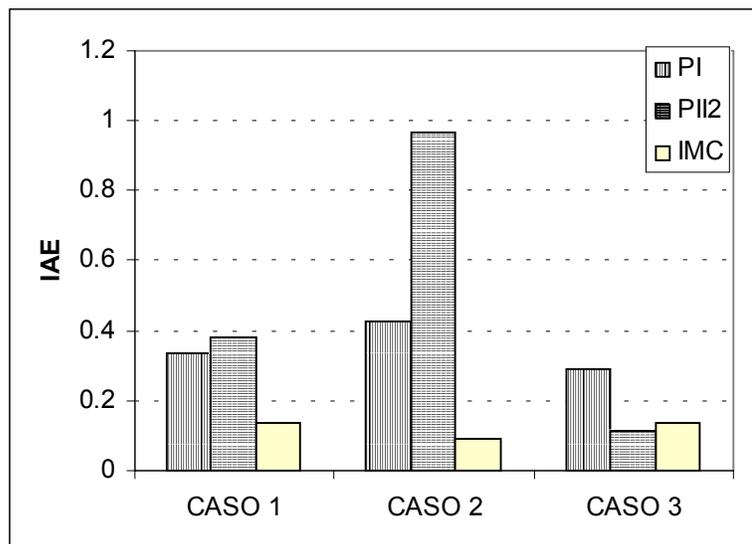


Figura 6.24: Resultados de IAE para la secuencia STAI

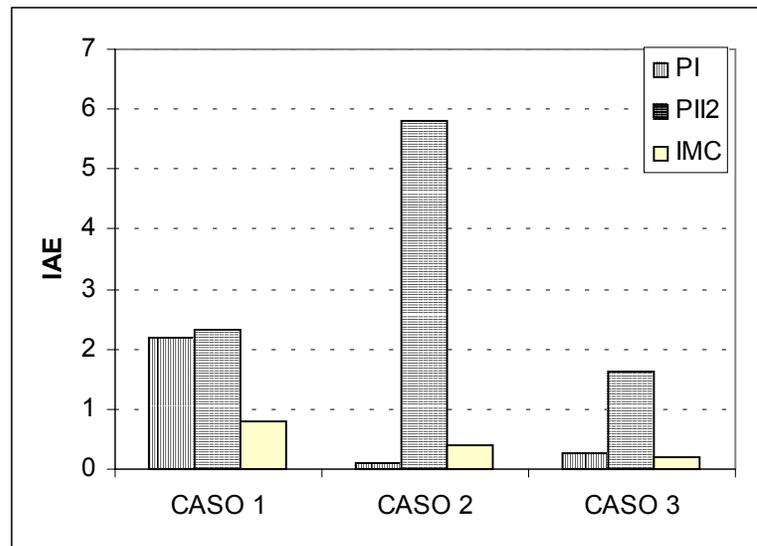


Figura 6.25: Resultados de IAE para el controlador Petlyuk

De los anteriores resultados se puede observar como un mejor desempeño dinámico no implica mayor robustez en el sistema, ya que las secuencias con mayor margen de robustez no fueron las que tuvieron los menores valores del IAE (mejor desempeño dinámico).

De acuerdo a los resultados en los sistemas MIMO el controlador IMC mostró el mejor desempeño dinámico en comparación con los otros controladores; sin embargo, la robustez no fue superior a la presentada por los controladores PI. Esto se debe a que el controlador IMC utiliza la inversa del modelo, que en el caso multivariable se ve afectada por las interacciones entre las variables a controlar; esto es, cualquier cambio afecta todas las variables a controlar. En general el proceso de destilación es un proceso mal condicionado. Las secuencias que presentaron los mejores números de condición en la frecuencia de corte tuvieron un excelente desempeño dinámico y un margen de robustez aceptable, aunque no el mejor. El número de condición en la frecuencia de corte proporciona una apropiada indicación del desempeño dinámico que se obtendrá en el lazo cerrado. Aunque no es un indicador directo de la robustez del sistema, puede servir para discriminar los sistemas que tendrán, además de un mal desempeño, bajos márgenes de robustez. Esto se observó en los casos de estudio ya que los sistemas que presentaron el peor comportamiento en la frecuencia de corte (con un máximo en el número de condición), además de tener un mal desempeño dinámico (altos IAE), tuvieron un margen de robustez pequeño.

---

## 6.7 Conclusiones

En las secuencias estudiadas los controladores PI e IMC presentaron márgenes de robustez similares, y mayores a los obtenidos con los controladores PII<sup>2</sup>, mientras que para los tres controladores el mejor desempeño lo presentó la secuencia STAI, seguida de la secuencia STAD y el peor desempeño lo tuvo la secuencia Petlyuk.

En base a los tres casos estudiados, una mayor proporción del componente intermedio produce una mayor robustez para la secuencia, así como un mejor desempeño dinámico.

Para los tres tipos de controladores la secuencia Petlyuk fue la que presentó el mayor margen de robustez, seguida de la secuencia STAI, mientras que los menores márgenes de robustez los presentó la secuencia STAD.

Los desempeños dinámicos del controlador IMC para las tres secuencias fueron los mejores, seguidos de los desempeños de los controladores PI, y el peor comportamiento lo presentaron los controladores PII<sup>2</sup>.

Los resultados obtenidos en este estudio indican que no es apropiado el empleo del controlador PII<sup>2</sup> en el caso multivariable ya que no mejora la robustez del sistema, ni el desempeño dinámico en comparación del controlador PI. Este resultado contradice lo expresado por Alvarez-Ramirez y col. (1997a).

El controlador IMC tuvo el mejor desempeño dinámico, pero no el mayor margen de robustez debido a las fuertes interacciones entre las diferentes variables controladas para las secuencias estudiadas.

De acuerdo a los resultados obtenidos, el número de condición alrededor de la frecuencia de corte da una indicación adecuada del desempeño dinámico que se obtiene al cerrar el lazo. Por otro lado, los sistemas que presentaron un máximo en el número de condición, además del mal desempeño dinámico (alto IAE), proporcionaron sistemas con un margen de robustez pequeño.

---

# Capítulo 7

## Conclusiones y Sugerencias

### 7.1 Conclusiones

En este trabajo se utilizó el margen de robustez como parámetro de comparación de la robustez en diferentes controladores retroalimentados. Los controladores PI y PID sintonizados con el algoritmo presentado en la Figura 3.8 tuvieron para todos los casos sistemas cuyas respuestas a lazo cerrado son más robustas, y presentan un mejor comportamiento dinámico que los sistemas sintonizados con ZN. Es por ello que se recomienda dicho algoritmo para obtener sistemas de control que tendrán un compromiso entre robustez y desempeño.

El controlador  $PII^2$  presentó un buen desempeño dinámico con la planta nominal, superior a los controladores PI y PID. Sin embargo, el análisis del margen de robustez mostró que el controlador  $PII^2$  no mejora la robustez en comparación con el controlador PI. El doble integral mejora el desempeño, pero añade inestabilidad al sistema ya que se aumenta un polo al sistema de control.

El controlador IMC, sintonizado con la metodología propuesta, demostró ser más robusto y tener un excelente desempeño dinámico, superior a los demás controladores. En conclusión resultó ser el mejor controlador, ya que fue superior en robustez y desempeño,

además de contar con un solo parámetro de sintonización. Esto debido a que el controlador utiliza la inversa del proceso.

Los sistemas MIMO que se estudiaron fueron tres secuencias térmicamente acopladas (STAD, STAI y Petlyuk). Para las tres secuencias acopladas los controladores PI e IMC presentaron márgenes de robustez similares, y mayores a los obtenidos con los controladores PII<sup>2</sup>. Respecto al desempeño dinámico, el controlador IMC presentó los mejores desempeños, seguidos de los controladores PI, y por último los controladores PII<sup>2</sup>. De acuerdo a los resultados aquí presentados no es conveniente utilizar el controlador PII<sup>2</sup> en los sistemas MIMO ya que no mejora la robustez del sistema, ni el desempeño dinámico.

Los resultados de las secuencias estudiadas indican que tanto la robustez como el desempeño dinámico se benefician por la presencia del componente intermedio.

Para los tres tipos de controladores la secuencia Petlyuk tuvo el mayor margen de robustez seguida de la secuencia STAI, mientras que los menores márgenes de robustez los presentó la secuencia STAD. En cuanto al desempeño dinámico la secuencia STAI tuvo el mejor, seguida de la secuencia STAD, y el peor desempeño lo presentó la secuencia Petlyuk.

Los resultados obtenidos muestran que el valor del número de condición del sistema MIMO a la frecuencia de corte da una indicación adecuada del desempeño dinámico que se obtiene en el lazo cerrado. Además, los sistemas que tienen un máximo en el número de condición proporcionan sistemas con un margen de robustez pequeño.

El margen de robustez resultó ser una herramienta adecuada para el análisis de sistemas de control, la comparación de controladores y técnicas de sintonización, y el diseño de sistemas de control más robustos.

## 7.2 Sugerencias y recomendaciones

Para realizar el cálculo del margen de robustez es necesario linealizar los sistemas de control; las respuestas se ajustan a sistemas lineales y los tiempos muertos se ajustan con aproximaciones de Padé. Estos ajustes representan errores que deben de minimizarse para no obtener conclusiones erróneas.

Es difícil poder estudiar el efecto que tendrían los parámetros de un proceso en la robustez, ya que se encuentran englobados en los coeficientes de la ecuación características.

---

Sin embargo, sería interesante poder estudiar el efecto de las incertidumbres en los parámetros de los procesos de interés.

El estudio del margen de robustez para las secuencias térmicamente acopladas estudiadas puede extenderse ampliando los casos de estudio para analizar la robustez en mezclas ternarias con diferentes valores del índice de facilidad de separación, analizando la influencia de dicho índice en la robustez. También pueden estudiarse los nuevos arreglos presentados por Ramírez Corona (2002) para un amplio conjunto de mezclas, y compararlo con las tres secuencias térmicas analizadas en este trabajo, encontrando la más robusta.

El margen de robustez puede emplearse en otras áreas de la Ingeniería Química, por ejemplo como herramienta de análisis y diseño robusto de redes de intercambiadores de calor, para que la red resultante sea robusta a los cambios de temperatura de las corrientes.

---

# Referencias

- Abdul Mutalib, M. I. y R. Smith, 1998, "Operation and Control of Dividing Wall Distillation Columns. Part I: Degrees of Freedom and Dynamic Simulation", *Trans. Inst. Chem. Eng.* vol. 76, págs. 308-318.
- Abdul Mutalib, M. I. A. O. Zeglam y R. Smith, 1998, "Operation and Control of Dividing Wall Distillation Columns. Part II: Simulation and Pilot Plant Studies Using Temperature Control", *Trans. Inst. Chem. Eng.* vol. 76, págs. 319-334.
- Alatqi, I. M. y W. L. Luyben, 1986, "Control of Complex Sidestream Column/Stripper Distillation Configuration", *Ind. Eng. Chem. Des. Dev.*, vol. 25, No. 3, págs. 762-767.
- Alvarez-Ramirez, J.; R. Femat y A. Barreiro, 1997a, "A PI Controller with Disturbance Estimation", *Ind. Eng. Chem. Res.* vol. 36, No. 9, págs. 3668-3675.
- Alvarez-Ramirez, J.; I. Cervantes.; R. Femat, 1997b, "Robust Controllers for a Heat Exchanger", *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 36, págs. 382-388.
- Barmish, B. R., 1988, New tools for robustness analysis, *Proceeding of 27<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*.
- Barmish, B. R. 1994, New Tools for Robustness of Linear Systems, McMillan Publishing Company.
- Brosilow, C. B., 1979, "The Structure and Design of Smith Predictor for the View point of Inferential Control", *Joint Automatic Control Conference Proceeding*, Denver, CO.

- 
- Castro Agüero, A y A. Jiménez Gutiérrez, 2002, "Método Corto para el Diseño de Columnas Destilación Térmicamente Acopladas Petlyuk", *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, vol. 1, págs. 85-96.
- Ciacone, R. y T. Marlin, 1992, "Tune Controller for Meet Plant Objectives", *Control*, vol 5, págs. 50-57.
- García, C. E. y M. Morari, 1982, "Internal Model Control – 1. A Unifying Review and Some New Results", *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, vol.21, págs. 308-323.
- García, C. E. y M. Morari, 1985a, "Internal Model Control – 2. Design Procedure for Multivariable Systems", *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, vol.24, págs. 472-484.
- García, C. E. y M. Morari, 1985b, "Internal Model Control – 3. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines", *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, vol. 24, págs. 484-494.
- Glinos, K. y M. F. Malone, 1985, "Minimum Vapor Flows in Distillation Colum with sidestream Stripper", *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, vol.24, págs. 1087-1090.
- Hernández, S. 1998, "Estudio Sobre la Optimización y Control de Esquemas de Destilación Térmicamente Acopladas", Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Hernández, S., S. Pereira Pech, A. Jiménez y V. Rico Ramírez, 2003, "Energy Efficiency o fan Indirect Thermally Coupled Distillation Sequence", *The Can. J. Chem. Eng.*, vol. 81, October, 1.
- Hernández, S. y A. Jiménez, 1996, "Design of Optimal Thermally – Coupled Distillation System Using a Dynamic Model", *Trans. IChemE*, vol. 74, pags. 357-362.
- Hernández, S. y A. Jiménez, 1999a, "Design of Energy – Efficient Petlyuk Systems", *Computer and Chemical Engineering*, vol. 23, No. 8, pags. 1005-1010.
- Hernández, S. y A. Jiménez, 1999b, "Controllability Analysis of Thermally Coupled Distillation Systems", *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 38, No. 10, pags. 3957-3963.
- Kaibel, G., 2002, "Process Synthesis and Design in Industrial Practice", *European Symposium on Computer Aided Process Engineering -12*, Ed. Grievink y J. V. Schijndel, Elsevier, Holland, págs. 9-22.
-

- 
- Kharitonov, V. L. 1978, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, págs. 2086-2088.
- Larsson, T. y S. Skogestad, 2000, "Plantwide Control – A Review and A New Design Procedure", *Models, Identification and Control*, vol. 21, No. 4, págs. 209-240.
- Lau, H., J. Alvarez y K. F. Jensen, 1985, "Synthesis of Control Structures by Singular Value Analysis: Dynamic Measures of Sensitivity and Interaction", *AIChE Journal*, vol. 31, No. 3, págs. 427-439.
- Levien, K. L. y M. Morari, 1987, "Internal Model Control of Coupled Distillation Columns", *AIChE Journal*, vol. 33, No. 1, págs. 83-98.
- López, A. M., P. W. Murrill, y C. L. Smith, 1969, "Tuning PI and PID Digital Controller", *Instr. and Control Systems.*, vol. 42, pág. 89-95.
- Luyben, W. L. 1990, Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, McGraw Hill.
- Luyben, W. L. 2000, "Tuning Proportional-Integral Controller for Process with Both Inverse Response and Deadtime", *Ind. Eng. Chem. Res.* vol. 39, No. 4, págs. 973-976.
- Luyben, W. L. 2001, "Effect of Derivative Algorithm and Tuning Selection on PID Control for Dead-Time Processes", *Ind. Eng. Chem. Res.* vol. 40, No. 16, págs. 3605-3611.
- Marlin, T. E. 1995, Process Control, McGraw-Hill.
- Morari, M. 1983, "Design of resilient processing plans III: a general framework for the assessment of dynamic resilience", *Chemical Engineering Science*, vol. 38, págs. 1881-1891.
- Morari, M. y E. Zafiriou, 1989, Robust Process Control, Prentice Hall.
- Morari, M. y W. Grimm, 1985, "Designo f Resilient Processing Plans – VII. Design of Energy Management Systems for Unstable Reactors- New Insights", *Chem. Eng. Sci.*, vol. 40, pág. 187.
- Ramírez Corona, N., 2002, "Estudio Comparativo de Secuencias de Destilación No Convencionales para Mezclas Ternarias", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
-

- 
- Segovia Henández, J. G., 2004, "Control de Esquemas de Destilación Térmicamente Acoplados", Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Serra, M., A. Espuña y L. Puigjaner, 2003, "Controllability of Different Multicomponent Distillation Arrangements", *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 42, No. 8, págs. 1773-1782.
- Skogestad, S. y I. Postlethwaite, 1996, Multivariable Feedback Control, JOHN WILEY & SON.
- Skogestad, S. y M. Morari, 1988, "LV-Control of High-Purity Distillation Columns", *Chem. Eng. Sci.*, vol 43, págs. 33-48.
- Smith, C. A., A. B. Corripio, y J. Martin Jr., 1975, "Controller Tuning from Simple Process Model", *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 22, pág. 39.
- Smith, C. A. y A. B. Corripio, 1991, Control Automático de Procesos, Noriega-Limusa,.
- Soto Becerra, C. A. 1995, "Aplicación de Técnicas de Control Robusto en Ingeniería Química", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Soto Becerra, C. A. 2002, "Evaluación de Alternativas de Diseño en Ingeniería Química Utilizando Técnicas de Control Robusto", Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Stephanopoulos, G. 1984, Chemical Process Control, Prentice Hall.
- Tedder, D. W. y D. F. Rudd, 1978, "Parametric Studies in Industrial Distillation", *AIChE Journal*, vol. 24, págs. 303-334.
- Triantafyllou, C. y R. Smith, 1992, "The Design and Optimization of Fully Thermally Coupled Distillation Columns", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, vol. 70, págs. 118-132.
- Tyreus, B. D. y W. I. Luyben, 1992, "Tuning PI Controller for Integrator/Dead time Processes", *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 31, págs. 2625-2628.
- Tsytkin, Y. Z. y B. T. Polyak, 1991, "Frequency Domain Criteria for  $l^p$  Robust Stability of Continuous Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, No. 12, págs. 1464-1469.
- Wolf, A. E. y S. Skogestad, 1995, "Operation of Integrated Three Product (Petlyuk) Distillation Columns", *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 34, No. 6, págs. 2094-2103.
- Yu, C. C. y Luyben, W. 1986, "Design of Multiloop SISO Controller in Multivariable Processes", *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, Vol. 25, págs. 498-503.
-

---

Ziegler, J. G. y N. B. Nichols, 1942, "Optimum Setting for Automatic Controller", *Trans. ASME*, vol. 64, pág. 759.

---

# Apéndice A

## Ecuaciones Características

En este apéndice se presentan las ecuaciones características de los sistemas SISO para los casos de estudio de la Figura 3.1.

Ecuaciones características para los controladores PI y PID:

Caso *a*

$$0.387s^5 + 3.272s^4 + 7.589s^3 + (6.043 + 1.205K_C\tau_D)s^2 + (0.617 + 1.205K_C)s + 1.205\frac{K_C}{\tau_I} \quad \text{A.1}$$

Caso *b*

$$0.001s^7 + (0.0176 + 0.05K_C\tau_D)s^6 + (0.9832 - 3.3K_C\tau_D + 0.05K_C)s^5 + \left(24.68 - 3.3K_C + 78.6K_C\tau_D + 0.05\frac{K_C}{\tau_I}\right)s^4 + \left(245.76 - 396K_C\tau_D + 78.6K_C - 3.3\frac{K_C}{\tau_I}\right)s^3 + \left(950.4 + 720K_C\tau_D - 396K_C + 78.6\frac{K_C}{\tau_I}\right)s^2 + \left(1440 + 720K_C - 396\frac{K_C}{\tau_I}\right)s + 720\frac{K_C}{\tau_I} \quad \text{A.2}$$

Caso *c*

$$s^6 + 25s^5 + 185s^4 + (-6K_C\tau_D + 132)s^3 + (-6K_C + 30 + 3K_C\tau_D)s^2 + \left(-6\frac{K_C}{\tau_I} + 1 + 3K_C\tau_D\right)s + 3\frac{K_C}{\tau_I} \quad A.3$$

Caso *d*

$$\left(D^2 + K_C\tau_D D^2\right)s^4 + \left(D^2 - 6K_C D\tau_D + 6D\tau_D + K_C D^2\right)s^3 + \left(12 + 6D - 6K_C D + \frac{K_C D^2}{\tau_I} + 12K_C\tau_D\right)s^2 + \left(12K_C - \frac{6K_C D}{\tau_I} + 12\right)s + 12\frac{K_C}{\tau_I} \quad A.4$$

Caso *e*

$$\left(-K_C\tau_Z D^2\tau_D + K_C\tau_D D^2\right)s^5 + \left(2D^2 + K_C D^2\tau_D + 6D + 6K_C\tau_D\tau_Z D - K_C\tau_Z D^2\right)s^4 + \left(6K_C\tau_Z D - 6K_C\tau_D D + K_C D^2 - 12K_C\tau_D\tau_Z + 12 + D^2 - K_C\tau_Z \frac{D^2}{\tau_I} + 12D\right)s^3 + \left(-6K_C\tau_Z \frac{D}{\tau_I} + 12K_C\tau_D - 6K_C\tau_D + K_C \frac{D^2}{\tau_I} - 12K_C\tau_Z + 6D + 24\right)s^2 + \left(-12K_C \frac{\tau_Z}{\tau_I} + 12K_C - 6K_C \frac{D}{\tau_I} + 12\right) + 12\frac{K_C}{\tau_I} \quad A.5$$

Ecuaciones características para el controlador PII<sup>2</sup>:Caso *a*

$$0.387s^6 + (3.272 + 0.387g_1)s^5 + (3.272g_1 + 7.859)s^4 + (6.043 + 7.859g_1)s^3 + (1.205K_C + 6.043g_1 + 0.617)s^2 + \left(1.205K_C g_1 + 1.205\frac{K_C}{\tau_I} + 0.617g_1\right)s + 1.205\frac{K_C g_1}{\tau_I} + 1.205K_C K_e \quad A.6$$

Caso *b*

$$\begin{aligned}
& 1E^{-4}s^8 + (0.176 + 1E^{-4}g_1)s^7 + (0.9832 + 0.01K_C + 0.0176g_1)s^6 + \\
& + \left( 0.01K_Cg_1 + 24.684 - 0.66K_C + 0.9832g_1 + 0.01\frac{K_C}{\tau_I} \right) s^5 \\
& + \left( -0.66\frac{K_C}{\tau_I} + 245.76 + 0.01K_CK_e - 0.66K_Cg_1 + 0.01\frac{K_Cg_1}{\tau_I} + 15.72K_C24.684g_1 \right) s^4 \\
& + \left( 15.72K_Cg_1 + 15.72\frac{K_C}{\tau_I} - 79.5K_C - 0.66\frac{K_Cg_1}{\tau_I} + 245.76g_1 + 950.4 - 0.66K_CK_e \right) s^3 \quad A.7 \\
& + \left( 1440 - 79.2\frac{K_C}{\tau_I} + 144K_C + 15.72K_CK_e - 79.2K_Cg_1 + 950.4g_1 + 15.72\frac{K_Cg_1}{\tau_I} \right) s^2 \\
& + \left( -79.2K_CK_e - 79.2\frac{K_Cg_1}{\tau_I} + 144\frac{K_C}{\tau_I} + 1440g_1 + 144K_Cg_1 \right) s \\
& + 144K_CK_e + 144\frac{K_Cg_1}{\tau_I}
\end{aligned}$$

Caso *c*

$$\begin{aligned}
& s^7 + (g_1 + 25)s^6 + (25g_1 + 185)s^5 + (132 + 185g_1)s^4 + \\
& (-6K_C + 132g_1 + 30)s^3 + \left( -6K_Cg_1 - 6\frac{K_C}{\tau_I} + 30g_1 + 3K_C + 1 \right) s^2 + \\
& \left( 3K_Cg_1 - 6\frac{K_Cg_1}{\tau_I} + 3\frac{K_C}{\tau_I} - 6K_CK_e + g_1 \right) s + 3K_CK_e + 3\frac{K_Cg_1}{\tau_I} \quad A.8
\end{aligned}$$

Caso *d*

$$\begin{aligned}
& D^2 s^6 + (D^2 + D^2 g_1 + 6D + K_C D^2) s^5 \\
& + \left( \frac{K_C D^2}{\tau_I} + K_C D^2 g_1 + 6D + D^2 g_1 - 6K_C D + 6D g_1 + 12 \right) s^4 + \\
& + \left( -6 \frac{K_C D}{\tau_I} + 12K_C + 12g_1 + \frac{K_C D^2 g_1}{\tau_I} + 12 - 6K_C D g_1 + K_C D^2 K_e + 6D g_1 \right) s^3 \\
& + \left( -0.66 \frac{K_C}{\tau_I} + 245.76 + 0.01 K_C K_e - 0.66 K_C g_1 + 0.01 \frac{K_C g_1}{\tau_I} + 15.72 K_C 24.684 g_1 \right) s^2 \\
& + \left( -6K_C D K_e + 12g_1 - 6 \frac{K_C D g_1}{\tau_I} + 12 \frac{K_C}{\tau_I} + 12K_C g_1 \right) s + 12 \frac{K_C g_1}{\tau_I} + 12K_C K_e
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Caso *e*

$$\begin{aligned}
& -D^2 s^6 + (K_C \tau_Z D^2 - 6D - 2D^2 - D^2 g_1) s^5 \\
& + \left( -K_C D^2 + \frac{K_C \tau_Z D^2}{\tau_I} - D^2 - 2D^2 g_1 + K_C \tau_Z D^2 g_1 - 6D g_1 - 12 - 6K_C \tau_Z D - 12D \right) s^4 \\
& + \left( -6 \frac{K_C \tau_Z D}{\tau_I} - 24 + 6K_C D + -K_C D^2 g_1 - 6D - 6K_C \tau_Z D g_1 - 12g_1 + 12K_C \tau_Z \right. \\
& \quad \left. - 12D g_1 + K_C D^2 \tau_Z K_e + \frac{K_C \tau_Z D^2 g_1}{\tau_I} - D^2 g_1 - \frac{K_C D^2}{\tau_I} \right) s^3 \\
& + \left( 12K_C \tau_Z g_1 - 6K_C \tau_Z D K_e - 12 - 24g_1 - 12K_C + 12 \frac{K_C \tau_Z}{\tau_I} + 6K_C D g_1 - K_C D^2 K_e \right. \\
& \quad \left. - 6 \frac{K_C \tau_Z D g_1}{\tau_I} + 6 \frac{K_C D}{\tau_I} - \frac{K_C D^2 g_1}{\tau_I} - 6D g_1 \right) s^2 \\
& + \left( 6 \frac{K_C D g_1}{\tau_I} + 6K_C D K_e + 12K_C \tau_Z K_e + 12 \frac{K_C \tau_Z g_1}{\tau_I} - 12K_C g_1 - 12 \frac{K_C}{\tau_I} - 12K_C g_1 \right) s \\
& \quad - 12 \frac{K_C g_1}{\tau_I} - 12K_C K_e
\end{aligned} \tag{A.10}$$

## Apéndice B

### Parámetros Obtenidos en las Sintonizaciones

En este apéndice se presentan los parámetros de los controladores PI, PID, PII<sup>2</sup> e IMC obtenidos de acuerdo a los métodos de sintonización presentados en los capítulos 3, 4 y 5, para todos los casos de estudio.

Tabla B.1: Resultados de la sintonización de los controladores PI

Caso		Método	$K_C$	$\tau_I$	ISE	$r_{\max}$	
a		Z-N	4.745	3.850	2.914	0.105	
		Algoritmo	0.959	5.637	2.917	0.414	
b		Z-N	4.597	3.495	3.044	0.327	
		Algoritmo	1.700	0.774	2.441	0.396	
c		Z-N	1.266	19.533	11.260	0.239	
		Algoritmo	0.620	23.635	11.270	0.413	
d	D = 0.1	Z-N	7.494	0.318	0.203	0.283	
		Algoritmo	3.456	0.682	0.204	0.560	
	0.5	Z-N	1.750	1.409	0.735	0.340	
		Algoritmo	1.664	1.705	0.738	0.355	
	1	Z-N	1.042	2.540	1.477	0.320	
		Algoritmo	1.031	2.793	1.524	0.323	
	5	Z-N	0.520	9.439	8.813	0.339	
		Algoritmo	0.396	4.354	7.070	0.384	
e	$\tau_Z = 0.2$	D = 0.2	Z-N	2.427	2.382	1.295	0.249
			Algoritmo	1.315	2.620	1.313	0.396
		0.4	Z-N	1.745	2.989	1.502	0.274
			Algoritmo	1.427	3.288	1.518	0.325
		0.8	Z-N	1.195	3.995	2.114	0.242
			Algoritmo	1.183	4.394	2.162	0.246
		1.6	Z-N	0.828	5.673	3.601	0.224
			Algoritmo	0.691	4.368	3.602	0.252

Tabla B.1 (continuación.)

Caso		Método	$K_C$	$\tau_I$	ISE	$\Gamma_{max}$	
e	$\tau_Z =$	D = 0.2	Z-N	1.598	2.857	1.577	0.315
			Algoritmo	1.333	3.143	1.592	0.384
	0.4	0.4	Z-N	1.293	3.428	1.868	0.323
			Algoritmo	1.280	3.770	1.892	0.328
		0.8	Z-N	0.993	4.395	2.568	0.273
			Algoritmo	0.784	3.0155	2.569	0.312
		1.6	Z-N	0.752	6.043	3.711	0.242
			Algoritmo	0.687	4.125	3.721	0.257
	0.8	0.2	Z-N	0.946	3.491	2.422	0.403
			Algoritmo	0.940	3.840	2.485	0.427
		0.4	Z-N	0.843	4.055	2.835	0.382
			Algoritmo	0.835	4.461	2.946	0.385
		0.8	Z-N	0.729	5.021	3.683	0.316
			Algoritmo	0.721	5.523	3.877	0.317
	1.6	0.2	Z-N	0.622	6.677	4.824	0.274
			Algoritmo	0.469	3.690	4.852	0.313
		0.4	Z-N	0.520	4.209	4.651	0.506
			Algoritmo	0.515	4.629	4.908	0.525
		0.8	Z-N	0.495	4.807	5.286	0.436
			Algoritmo	0.490	5.288	5.616	0.437
	1.6	Z-N	0.469	5.838	5.775	0.363	
		Algoritmo	0.292	2.587	5.78	0.424	
	1.6	1.6	Z-N	0.450	7.598	6.679	0.317
			Algoritmo	0.307	3.106	6.684	0.366

Tabla B.2: Resultados de la sintonización de los controladores PID

Caso		Método	$K_C$	$\tau_I$	$\tau_D$	ISE	$r_{max}$		
a		Z-N	6.140	2.310	0.58	1.219	0.172		
		Algoritmo	2.090	5.447	1.353	1.221	0.398		
b		Z-N	5.950	2.097	0.525	Inf	0		
		Algoritmo	1.700	0.774	0.002	2.441	0.396		
c		Z-N	1.638	11.920	2.93	7.263	0.251		
		Algoritmo	0.763	18.875	5.451	7.28	0.425		
d	D = 0.1	Z-N	9.697	0.191	0.048	0.101	0.271		
		Algoritmo	5.468	0.659	0.050	0.102	0.436		
	0.5	Z-N	2.264	0.845	0.211	0.556	0.226		
		Algoritmo	0.946	0.972	0.120	0.797	0.440		
	1	Z-N	1.348	1.524	0.381	1.089	0.189		
		Algoritmo	1.335	1.676	0.097	1.260	0.237		
	5	Z-N	0.673	5.664	1.416	5.975	0.137		
		Algoritmo	0.356	2.802	0.060	6.536	0.321		
e	$\tau_z =$ 0.2	D = 0.2	Z-N	3.141	1.429	0.357	0.847	0.277	
			Algoritmo	1.771	1.723	0.493	0.848	0.393	
		0.4	Z-N	2.259	1.794	0.448	1.038	0.237	
			Algoritmo	1.722	2.170	0.493	1.038	0.298	
		0.8	Z-N	1.547	2.397	0.599	1.471	0.185	
			Algoritmo	1.531	2.756	0.427	1.575	0.196	
	1.6	Z-N	1.071	3.404	0.851	2.420	0.146		
		Algoritmo	0.848	3.369	0.309	2.848	0.212		
	0.4	0.2	Z-N	2.068	1.714	0.429	1.207	0.319	
			Algoritmo	1.469	2.282	0.425	1.217	0.408	
		0.4	Z-N	1.673	2.057	0.514	1.393	0.243	
			Algoritmo	1.506	2.468	0.354	1.461	0.280	
		0.8	Z-N	1.285	2.637	0.659	1.828	0.184	
			Algoritmo	1.156	2.900	0.309	2.047	0.229	
		1.6	Z-N	0.973	3.626	0.907	2.789	0.185	
			Algoritmo	0.771	3.590	0.118	3.353	0.208	
		0.8	0.2	Z-N	1.224	2.095	0.524	2.040	0.325
				Algoritmo	0.870	2.304	0.408	2.060	0.430
	0.4		Z-N	1.091	2.433	0.608	2.264	0.240	
			Algoritmo	0.982	2.920	0.288	2.320	0.317	
	0.8		Z-N	0.943	3.013	0.753	2.759	0.178	
			Algoritmo	0.849	3.314	0.129	3.010	0.273	
	1.6		Z-N	0.805	4.006	1.001	3.840	0.138	
			Algoritmo	0.638	3.848	0.028	4.215	0.271	
1.6	0.2	Z-N	0.673	2.525	0.631	4.037	0.308		
		Algoritmo	0.318	1.586	0.359	4.110	0.460		
	0.4	Z-N	0.640	2.884	0.721	4.570	0.221		
		Algoritmo	0.291	1.540	0.225	4.560	0.417		
	0.8	Z-N	0.607	3.503	0.876	6.625	0.159		
		Algoritmo	0.290	1.680	0.073	4.918	0.370		
	1.6	Z-N	0.582	4.559	1.140	inf	0		
		Algoritmo	0.235	1.821	0.000	6.269	0.374		

Tabla B.3: Resultados de la sintonización de los controladores PII<sup>2</sup>

Caso		$\tau_c$	L	ISE	$r_{\max}$	
a		0.505	0.67	2.913	0.322	
b		0.473	1.393	2.434	0.304	
c		0.568	0.509	11.262	0.334	
d	D = 0.1	0.209	1.851	0.203	0.419	
	0.5	0.433	1.063	0.771	0.228	
	1	0.565	0.79	1.475	0.198	
	5	0.903	0.415	7.661	0.294	
e	$\tau_z =$ 0.2	D = 0.2	0.516	0.81	1.295	0.219
		0.4	0.565	0.743	1.577	0.187
		0.8	0.625	0.673	2.113	0.146
		1.6	0.965	0.494	3.595	0.192
	0.4	0.2	0.605	0.73	1.655	0.219
		0.4	0.57	0.725	1.887	0.161
		0.8	0.78	0.59	2.567	0.186
		1.6	1.065	0.46	4.121	0.215
	0.8	0.2	0.75	0.608	2.424	0.228
		0.4	0.874	0.552	2.836	0.237
		0.8	1.045	0.48	3.679	0.246
		1.6	1.278	0.408	5.355	0.262
	1.6	0.2	1.215	0.425	4.638	0.341
		0.4	1.315	0.395	5.274	0.341
		0.8	1.33	0.39	5.767	0.311
		1.6	1.41	0.355	7.171	0.299

Tabla B.4: Resultados de la sintonización de los controladores IMC

Caso		$\tau_F$	ISE	$r_{\max}$	
a		0.033	0.10	0.9998	
b		0.02	1.03	0.687	
c		0.22	5.50	0.25	
d	D = 0.1	0.15	0.18	0.419	
	0.5	0.01	0.53	0.228	
	1	0.01	1.02	0.198	
	5	0.01	5.03	0.294	
e	$\tau_z =$ 0.2	D = 0.2	0.73	1.29	0.219
		0.4	0.71	1.50	0.187
		0.8	0.82	2.07	0.146
		1.6	1.4	3.57	0.192
	0.4	0.2	0.73	1.57	0.219
		0.4	0.8	1.85	0.161
		0.8	1.05	2.55	0.186
		1.6	1.3	3.66	0.215
	0.8	0.2	1.03	2.44	0.228
		0.4	1.2	2.83	0.237
		0.8	1.7	3.82	0.246
		1.6	1.8	4.73	0.262
	1.6	0.2	2.02	4.64	0.341
		0.4	2.9	5.85	0.341
		0.8	2.5	5.78	0.311
		1.6	2.6	6.70	0.299

# Apéndice C

## Códigos en MATLAB

En este apéndice se presentan algunos de los códigos escritos en MATLAB que se emplearon en el desarrollo del presenta trabajo.

```
%
% PROGRAMA QUE CALCULA LA FUNCION TSYPKIN POLYAK
% PARA EL POLINOMIO DE INTERVALO
%  $p_0(s,q)=s^6+15s^5+104s^4+420s^3+1019s^2+1365s+676$ 
% JESUS RAUL ORTIZ DEL CASTILLO
% DICIEMBRE 2000
%
w=0:.01:30;
s=w.*i;
p0=s.^6+15*s.^5+104*s.^4+420*s.^3+1019*s.^2+1365*s+676;
y=(real(p0))./(w.^6+104*w.^4+1019*w.^2+676)+i.*(imag(p0))./(15*w.^5+420*w.^3+
1365*w);
plot(y,'k');
hold on
for r=0.0:.135/8:.135;
x=[-r,r,r,-r,-r];
z=[-r,-r,r,r,-r];
plot(x,z,'k')
axis([- .3 .3 - .3 .3])
end
title('Funcion G_{TP}(wj)');
xlabel('Real');
ylabel('Imaginario')
grid
```

---

```

%
% PROGRAMA QUE CALCULA LA FUNCION TSYPKIN POLYAK
% PARA EL POLINOMIO NOMINAL
% JESUS RAUL ORTIZ DEL CASTILLO
% SEPTIEMBRE 2002
%
function b=r_max(p)
n=100000;
b=0;
R1=roots(p);
R2=real(R1);
if(R2<0)
    b=1;
    w=0.0001:3/n:3.0001;
    s=w.*i;
    grado=length(p);
    p0=0;
    for m=1:grado;
        p0=p(m)*s.^(grado-m)+p0;
    end
    denpar=0;
    denimpar=0;
    for m=1:grado
        c=rem((grado-m),2);
        if(c==0)
            denpar=p(m)*w.^(grado-m)+denpar;
        else
            denimpar=p(m)*w.^(grado-m)+denimpar;
        end
    end
    y=(real(p0))./(denpar)+i.*(imag(p0))./(denimpar);
    plot(y)
    for k=1:n+1
        x1=abs(real(y(k)));
        x2=abs(imag(y(k)));
        x3(k)=max(x1,x2);
    end
    plot(w,x3)
    b=min(x3);
else
b=0;
end

% PROGRAMA QUE GRAFICA EL MARGEN DE ROBUSTEZ
% PARA EL CONTROLADOR PII^2 EN EL CASO C

```

---

---

```

%      JESUS RAUL ORTIZ DEL CASTILLO
%      ENERO 2002
%
n=100000;
nn=40;
kk=0;
% Dato del proceso
t=27.5;
kp=3;
for L=0.1:0.6/nn:0.7
    kk=kk+1;
    ii=0;
    for tc=0.3:25.4/nn:26
        ii=ii+1;
        l=0;
        g1=2*L;
        g2=L^2;
        KE=-g2*(g1-1/tc)/(1/t-1/tc);
        TI=-(1/t-1/tc)/g2;
        KC=-(1/t-1/tc)/kp;
        p=[1 (g1+25) (185+25*g1) (185*g1+132) (-6*KC+30+132*g1) (-6*KC*g1-
6*KC/TI+3*KC+30*g1+1) (3*KC*g1-6*KC*g1/TI+3*KC/TI-6*KC*KE+g1)
(3*KC*KE+3*KC*g1/TI)];
        R1=roots(p);
        R2=real(R1);
        if(R2 < 0)
            w=0:20/n:20;
            s=w.*i;
            grado=length(p);
            p0=0;
            for m=1:grado;
                p0=p(m)*s.^(grado-m)+p0;
            end
            denpar=0;
            denimpar=0;
            for m=1:grado
                c=rem((grado-m),2);
                if(c==0)
                    denpar=p(m)*w.^(grado-m)+denpar;
                else
                    denimpar=p(m)*w.^(grado-m)+denimpar;
                end
            end
            y=(real(p0))./(denpar)+i.*(imag(p0))./(denimpar);
            b=1;

```

---

---

```

        for k=1:n;
            x1=abs(real(y(k)));
            x2=abs(imag(y(k)));
            if(abs(x1-x2) < 0.001)
                if(x2<b)
                    b=x2;
                    l=l+1;
                end
            end
        end
    else
        r(kk,ii)=0;
        k1(kk,ii)=tc;
        k2(kk,ii)=L;
    end
    if (l~=0)
        r(kk,ii)=b;
        k1(kk,ii)=tc;
        k2(kk,ii)=L;
    end
end
end
end
surf(k2,k1,r)
view([35,20])
xlabel('L')
ylabel('t_C')
zlabel('r_{max}')
grid

%
%   PROGRAMA QUE GRAFICA LA RESPUESTA DE
%   LOS CONTROLADORES PI Y PID PARA EL CASO A
%   JESUS RAUL ORTIZ DEL CASTILLO
%   ENERO 2003
%
dt=0.1;
tin=0:dt:50;
ui=1;
g=nd2sys([1.205],[0.387/1.4 3.272*1.3 7.859*1.3 6.043/1.4 0.617/1.2]);
[A,B,C,D]=unpck(g);
[Ku,pm,Wu,wcp]=margin(A,B,C,D);
Pu=2*pi/Wu;Kc=Ku/2.2;ti=Pu/1.2; % Ziegler-Nichols' tuning
Kc3=Ku/1.7;ti3=Pu/2;td3=Pu/8;
Kc2=0.959;ti2=5.637;
Kc4=2.09;ti4=5.447;td4=1.353;

```

---

---

```

c=nd2sys([ti,1],[ti,1.e-4],Kc); % PI-Controller ZN
c2=nd2sys([ti2,1],[ti2,1.e-4],Kc2); % PI-Controller ALGORITMO
c3=nd2sys([0.001+td3,1+0.01/ti3,1/ti3],[0.001,1,1.e-4],Kc3); % PID-Controller ZN
c4=nd2sys([0.001+td4,1+0.01/ti4,1/ti4],[0.001,1,1.e-4],Kc4);%PID-Controller
ALGORITMO
gc=mmult(g,c);
gc2=mmult(g,c2);
gc3=mmult(g,c3);
gc4=mmult(g,c4);
s=minv(madd(1,gc));
s2=minv(madd(1,gc2));
s3=minv(madd(1,gc3));
s4=minv(madd(1,gc4));
t=msub(1,s);
t2=msub(1,s2);
t3=msub(1,s3);
t4=msub(1,s4);
[A,B,C,D]=unpck(t);
[y1,x,ty]=step(A,B,C,D,ui,tin);
[A,B,C,D]=unpck(t2);
[y2,x,ty2]=step(A,B,C,D,ui,tin);
[A,B,C,D]=unpck(t3);
[y3,x,ty3]=step(A,B,C,D,ui,tin);
[A,B,C,D]=unpck(t4);
[y4,x,ty4]=step(A,B,C,D,ui,tin);
plot(ty,y1,'b',[27,33],[1.2,1.2],'b',ty2,y2,'-k',[27,33],[1.4,1.4],'-k',ty3,y3,'-
r',[27,33],[1.3,1.3],'-r',ty4,y4,'m',[27,33],[1.5,1.5],':m')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Variable manipulable')
axis([0 50 0 1.9])

%CASO MULTIVARIABLE 2
omega=logspace(-2,3,60);
%STAD
for w=1:60;
s=omega(w)*i;
m1=[1.52067/(0.771*s+1),-3.236*exp(-0.26*s)/(1.955*s+1),4.6974/(2.5*s+1)-
3.1446/(0.3*s+1)
-
2.41589/((1.4286*s+1)*(0.7796*s+1)),1.305458/((0.8932*s+1)*(0.9065*s+1)),0.3409/(0.28*
s+1)-3.1739/(3.5*s+1)
-12.4627*exp(-1.2*s)/((0.9196*s+1)*(0.99*s+1)),
0.34621/(1.02277*s+1),1.127098/(0.6137*s+1)];
[s1,v1,d1]=svd(m1);
sigma_max1(w)=v1(1,1);

```

---

---

```

sigma_min1(w)=v1(3,3);
numcond1(w)=sigma_max1(w)/sigma_min1(w);
%STAI
m2=[2.22679/(0.7733*s+1),-1.02/(0.8369*s+1),-4.16229/(0.7314*s+1)
-2.7285/(1.9361*s+1),1.10766/(1.468*s+1),0.184/(0.16*s+1)-1.1416/(1.54*s+1)
0.42695/(2.95*s+1)-0.5755/(0.25*s+1),-0.996*exp(-
0.3*s)/(1.8456*s+1),1.31732/(0.4*s+1)];
[s2,v2,d2]=svd(m2);
sigma_max2(w)=v2(1,1);
sigma_min2(w)=v2(3,3);
numcond2(w)=sigma_max2(w)/sigma_min2(w);
%Petluk
m3=[2.2555/(1.037*s+1),-0.05357/((0.714*s+1)*(1.4083*s+1)),-3.14457/(0.4498*s+1)
2.5645/(0.97*s+1),-1.61588/(1.279*s+1),-7.25798/(0.4348*s+1)
-0.744/(1.33*s+1),0.19167/(1.0525*s+1),0.26216/(0.19*s+1)];
[s3,v3,d3]=svd(m3);
sigma_max3(w)=v3(1,1);
sigma_min3(w)=v3(3,3);
numcond3(w)=sigma_max3(w)/sigma_min3(w);
end
colordef white
figure(1)
loglog(omega,sigma_min1,'-o',omega,sigma_min2,'-+',omega,sigma_min3,'-*')
title('Valores singulares minimos')
xlabel('Frecuencia')
ylabel('Valor singular minimo')
%text(0.1,0.001,'o STAD')
%text(0.1,0.0003,'+ STAI')
%text(0.1,0.0001,'* PETLYUK')
figure(2)
loglog(omega,sigma_max1,'-o',omega,sigma_max2,'-+',omega,sigma_max3,'-*')
title('Valores singulares maximos')
xlabel('Frecuencia')
ylabel('Valor singular minimo')
figure(3)
loglog(omega,numcond1,'-o',omega,numcond2,'-+',omega,numcond3,'-*')
title('Numero de condicion')
xlabel('Frecuencia')
ylabel('No. de condicion')

```

---