Curso avanzado de Fenómenos de Transporte
Dr. Juan Carlos Fierro González
Departamento de Ingeniería Química
Instituto Tecnológico de Celaya

Operaciones con Vectores

Adición y substracción de vectores

Si **v** y **w** son ambos vectores, entonces el resultado de las operaciones **v** + **w** y **v** – **w** son también vectores. Dichas operaciones cumplen con propiedades conmutativas y asociativas, de tal modo que:

$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{w} + \mathbf{v})$;

$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$.

Multiplicación de un vector por un escalar

El producto de la multiplicación entre el vector **v** por el escalar *a* es un vector cuya magnitud *a* veces la del vector **v**, o bien,

$a\ \mathbf{v} = a\mathbf{v}$

Esta operación cumple con propiedades conmutativas, asociativas y distributivas, de tal modo que:

$a\mathbf{v} = \mathbf{v}a$; $b(c\mathbf{v}) = (bc)\mathbf{v}$; $(a + b + c)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v}$

Producto punto entre dos vectores

El producto punto entre dos vectores **u** y **v** es un escalar definido por:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \varphi$; donde φ es el ángulo comprendido entre los vectores **u** y **v**.

Una interpretación geométrica de este producto consiste en definir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como la magnitud *v* del vector **v** multiplicada por la proyección de **u** sobre **v** (o viceversa).

Producto cruz entre dos vectores

El producto cruz entre dos vectores u y v es un vector definido por:

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \{uv \sin \varphi\}\mathbf{n_{uv}}$; donde $\mathbf{n_{uv}}$ es un vector unitario (ver siguiente sección) perpendicular al plano comprendido entre **u** y **v**, apuntando en la dirección en que un tornillo derecho lo haría si fuese girado de **u** hacia **v** a través del ángulo φ.

Operaciones de vectores en términos de sus componentes en sistemas coordenados

Vectores unitarios

Sean $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ vectores de magnitud unitaria en la dirección de los ejes 1, 2 y 3 de un sistema de ejes coordenados, las combinaciones del producto punto entre ellos resultarían en:

$\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1} = \mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3} \cdot \mathbf{e_3} = 1$

$\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_3} = \mathbf{e_3} \cdot \mathbf{e_1} = 0$

Estas operaciones pueden ser generalizadas como

$\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{ij}$; donde *i* y *j* pueden tomar los valores 1, 2 o 3.

Por lo tanto,

$\delta_{ij} = 1$, si $i = j$

$\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$

El escalar δ_{ij} es comúnmente denominado *delta de Kronecker* y es de gran utilidad para simplificar operaciones vectoriales ampliamente utilizadas en la descripción de fenómenos de transporte.

De manera similar, las combinaciones del producto punto entre los vectores unitarios resultan en:

$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_1} = \mathbf{e_2} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3} \times \mathbf{e_3} = \mathbf{0}$

$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3}$

$\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3} = \mathbf{e_1}$

$\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1} = \mathbf{e_2}$

$\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_3}$

$\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_2} = -\mathbf{e_1}$

$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_3} = -\mathbf{e_2}$

Estas operaciones pueden ser generalizadas como

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

donde

$\varepsilon_{ijk} = 1$ si $ijk = 123, 231, 312$

$\varepsilon_{ijk} = 0$ si dos o más índices son iguales entre sí.

$\varepsilon_{ijk} = -1$ si $ijk = 321, 213, 132$

El escalar ε_{ijk} es comúnmente conocido como *símbolo de permutación*.

Expansión de vectores en términos de sus componentes.

Todo vector **u** puede ser expresado como la suma vectorial de vectores proyectados sobre ejes de un sistema ortogonal. De tal modo que:

$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i$; donde u_i es la magnitud escalar que al ser multiplicada por cada vector unitario $\mathbf{e_i}$ resulta en las proyecciones (o componentes) del vector **u** sobre cada eje coordenado.

La representación de un vector en términos de sus componentes es de utilidad para describir varias operaciones vectoriales y tensoriales. Por ejemplo, la suma de dos vectores **u** y **v** puede ser representada de manera generalizada como:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i \pm \sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (u_i \pm v_i)\mathbf{e}_i$$

De manera similar, la multiplicación entre un vector **u** y un escalar *s* se puede expresar como:

$$s\mathbf{u} = s\left\{\sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i\right\} = \sum_{i=1}^{3} (su_i)\mathbf{e}_i$$

El producto punto como:

$$u \cdot v = \left(\left\{\sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i\right\} \cdot \left\{\sum_{j=1}^{3} v_j\mathbf{e}_j\right\}\right) = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)u_i v_j = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}(u_i v_j)\delta_{ij} = \sum_{i}^{3} u_i v_j$$

y el producto cruz como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left[\left\{\sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i\right\} \times \left\{\sum_{j=1}^{3} v_j\mathbf{e}_j\right\}\right] = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)u_i v_j = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i u_i v_k$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Operaciones tensoriales en términos de sus componentes en sistemas de coordenadas ortogonales

Producto diádico

Además de los productos punto y cruz entre dos vectores, existe un tercer tipo de multiplicación cuyo resultado es conocido como producto diádico. En está operación no se utiliza ningún signo de multiplicación y su resultado da lugar a cantidades conocidas como tensores de segundo orden.

El producto diádico entre dos vectores unitarios $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ se define como $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$. Puesto que la magnitud de los vectores $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ es la unidad, el tensor resultante es también unitario, pero como está relacionado con un par de ejes coordenados. Así pues, los tensores de segundo orden especifican el cambio simultáneo de una cantidad en términos de dos direcciones. En problemas que involucran fenómenos de transporte los tensores son de gran utilidad porque en ocasiones se desea conocer como cambia alguna propiedad con respecto a dos direcciones. Un ejemplo sencillo lo constituye la determinación del cambio de momento en un fluido en el sentido de las x a través de una unidad de área perpendicular a la dirección y (más detalles sobre esto serán proporcionados a lo largo de este curso).

Del mismo modo que un vector puede ser expresado en términos de sus componentes en un sistema de coordenadas como la suma de componentes escalares proyectados sobre los ejes multiplicados por los respectivos vectores unitarios, un tensor de segundo orden puede escribirse como una cantidad que asocia un escalar con un par de ejes coordenados. De este modo, un vector $\boldsymbol{\tau}$ puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \tau_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \tau_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \tau_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \tau_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \tau_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

donde los escalares τ_{ij} son los componentes del tensor de segundo orden $\boldsymbol{\tau}$. No es difícil darse cuenta de que pueden existir tensores de orden *n*, sin embargo dichos tensores están fuera del alcance del presente curso y la omisión de ejemplos mostrando operaciones con estas cantidades no representa ningún impedimento para comprender problemas de fenómenos de transporte, por lo que en este curso sólo se trabajará con tensores de segundo orden.

Existen varios tipos de tensores de segundo orden que deben ser enfatizados.

- Si $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, entonces se dice que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico,
- Si $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$, entonces se dice que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es antisimétrico,
- Si los componentes de un tensor $\boldsymbol{\varpi}$ resultan ser los mismos que los del tensor $\boldsymbol{\tau}$ pero con sus índices invertidos (o traspuestos), entonces se dice que el tensor $\boldsymbol{\varpi}$ es el vector traspuesto de $\boldsymbol{\tau}$ (o $\boldsymbol{\tau}^+$). De este modo:

  $$\tau^+ = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\tau_{ji}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

- Si los componentes de un tensor están formados por pares ordenados de los componentes de dos vectores **u** y **v**, el tensor resultante se conoce como el producto diádico de **u** y **v**. Es decir:

  $$\mathbf{uv} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}u_i v_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

  Nótese que $\mathbf{uv} \neq \mathbf{vu}$, pero $(\mathbf{vu})^+ = \mathbf{uv}$

- Si los componentes del tensor son la delta de Kronecker, el tensor es entonces un tensor unitario δ.

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_{i}^{3} \sum_{j}^{3} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

Adición de tensores

$$\boldsymbol{\tau} + \varpi = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \varpi_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} (\tau_{ij} + \varpi_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

Multiplicación de un tensor por un escalar

$$s\tau = s\left\{\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right\} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \{s\tau_{ij}\}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

Producto dos puntos de dos tensores

$$(\boldsymbol{\tau} : \varpi) = \left(\left\{\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right\} : \left\{\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \varpi_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\right\}\right) = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j : \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)$$
$$= \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\varpi_{ji}$$

Producto punto de dos tensores

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \varpi = \left\{\left(\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right) \cdot \left(\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \varpi_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\right)\right\} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)$$
$$= \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_l = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{l}^{3} \tau_{ij}\varpi_{kl}\delta_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = \sum_{i}^{3}\sum_{l}^{3} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_l(\sum_{j}^{3} \tau_{ij}\varpi_{jl})$$

donde puede verificarse que la sumatoria en *j* corresponde al componente *il* del tensor resultante del producto.

Producto punto de un vector con un tensor

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u} = \left\{\left(\sum_i^3\sum_j^3 \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(\sum_k^3 u_k\mathbf{e}_k\right)\right\} = \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3 \tau_{ij}u_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k) = \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3 \tau_{ij}u_k\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k)$$

$$= \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3 \tau_{ij}u_k\mathbf{e}_i\delta_{jk} = \sum_i^3\mathbf{e}_i\left\{\sum_j^3\tau_{ij}u_j\right\}$$

por lo tanto, el componente *i* del vector resultante del producto es la sumatoria en *j*.

Producto cruz de un tensor con un vector

$$\tau\times u = \left\{\left(\sum_i^3\sum_j^3 \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)\times\left(\sum_k^3 u_k\mathbf{e}_k\right)\right\} = \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3 \tau_{ij}u_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k) = \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3 \tau_{ij}u_k\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)$$

$$= \sum_i^3\sum_j^3\sum_k^3\sum_l^3 \varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l\tau_{ij}u_k\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k) = \sum_i^3\sum_l^3\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l\left\{\sum_j^3\sum_k^3\varepsilon_{jkl}\tau_{ij}u_k\right\}$$

donde puede verse que el producto es un tensor cuyo componente *il* es el resultado de la doble sumatoria en *j* y *k*.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Considere el operador vectorial diferencial *nabla* (∇) en coordenadas rectangulares:

$$\nabla = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i^3\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

dicho operador tiene componentes como cualquier vector, pero no puede existir por si mismo como cantidad, sino que debe *operar* sobre cantidades (o funciones) escalares, vectoriales o tensoriales. **NOTA**: La definición de ∇ presentada arriba es sólo válida para sistemas de coordenadas rectangulares. Este operador puede escribirse también para otros sistemas de coordenadas ortogonales (ver notas adicionales).

Gradiente de un campo escalar

Se define como gradiente de un campo escalar a la operación en la que ∇ opera sobre una función escalar. Por ejemplo, si a es una función escalar de x_1, x_2, y x_3, es decir:

$$a = a(x_1, x_2, x_3)$$

el gradiente de a es:

$$\nabla a = \mathbf{e}_1 \frac{\partial a}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial a}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial a}{\partial x_3} = \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

donde puede verse que el resultado es un vector.

El gradiente de a (∇a) no cumple con propiedades conmutativas o asociativas, por lo que

$$\nabla a \neq a \nabla$$

$$(\nabla a) b \neq \nabla (ab)$$

y sí cumple con propiedades distributivas, o sea

$$\nabla (a + b) = \nabla a + \nabla b$$

Divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial es el producto punto entre el operador ∇ y una función vectorial en un sistema de ejes coordenados. Es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\left\{ \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j^3 u_j \mathbf{e}_j \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 (e_i \cdot e_j) \frac{\partial}{\partial x_i} u_j = \sum_i^3 \sum_j^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j$$

$$= \sum_i^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Al igual que el gradiente de un campo escalar, la divergencia de un campo vectorial no es ni conmutativa, ni asociativa, pero si es distributiva. Es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{u} \cdot \nabla$$
$$\nabla \cdot a\mathbf{u} \neq \nabla a \cdot \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Esta operación es de gran importancia en fenómenos de transporte, como veremos más adelante en este curso, ya que un balance de masa en estado estacionario de un fluido newtoniano incompresible está dado por la divergencia de su velocidad.

"Curl" de un campo vectorial.

Esta operación es el producto cruz entre el operador nabla y una función vectorial en un sistema de ejes coordenados. Es decir:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\left\{ \sum_j^3 \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \times \left\{ \sum_k^3 u_k \mathbf{e}_k \right\} \right) = \sum_j^3 \sum_k^3 (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} u_k$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\} \mathbf{e}_3$$

donde puede verse que el *i*-ésimo componente del vector resultante es:

$$\sum_j^3 \sum_k^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k$$

Al igual que con las dos operaciones anteriores, el curl de un campo vectorial no es ni conmutativo ni asociativo, pero si es distributivo.

Gradiente de un campo vectorial

Esta operación está definida por el producto diádico entre el operador nabla y una función vectorial en un sistema de ejes coordenados. Es decir:

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\left\{ \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \left\{ \sum_j^3 u_j \mathbf{e}_j \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i} u_j$$

donde puede verse que el componente *ij* del tensor de segundo orden resultante de este gradiente es:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_j$$

Divergencia de un campo tensorial

Esta operación está definida como el producto punto entre el operador nabla y un tensor que es una función en un sistema de ejes coordenados. Es decir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left(\left\{ \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j^3 \sum_k^3 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \tau_{jk} \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk}$$

$$= \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \delta_{ij} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} = \sum_k^3 e_k \left\{ \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ik} \right\}$$

Laplaciano de un campo escalar

Está operación es el resultado de tomar la divergencia del gradiente de una función escalar. Es decir:

$$\nabla \cdot \nabla a = \left(\left\{ \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j^3 \mathbf{e}_j \frac{\partial a}{\partial x_j} \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_j} = \sum_i^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} a$$

La colección de operadores diferenciales operando sobre el escalar a en el resultado de esta operación se conoce como Laplaciano, y se expresa como:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\left\{ \sum_i^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j^3 e_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Laplaciano de un campo vectorial

Se define como la divergencia del gradiente de una función vectorial. Es decir:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \left(\left\{ \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j^3 \sum_k^3 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \right\} \right) = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k$$

$$= \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \delta_{ij} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \sum_k^3 \mathbf{e}_k \left(\sum_i^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_k \right)$$

donde puede verse que el *k*-ésimo componente del Laplaciano del vector **v** es $\nabla^2\mathbf{v}$.

Teoremas integrales de vectores y tensores

Los siguientes teoremas serán de gran utilidad en el planteamiento y resolución de problemas de fenómenos de transporte. La comprensión de estos teoremas es fundamental para este curso.

Teorema de divergencia de Gauss-Ostrogradskii

Si *V* es un volumen de control confinado en una superficie *S*, entonces:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$$

donde **n** es un vector unitario normal que apunta perpendicularmente hacia fuera del volumen de control. Existen otros dos teoremas similares que pueden ser utilizados con frecuencia:

$$\int_V (\nabla a) dV = \int_S (\mathbf{n} a) dS$$

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dS$$

Teorema de Stokes

Si una superficie *S* está rodeada por una curva cerrada *C*, entonces:

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{v}]) dS = \oint_C (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) dC$$

donde **t** es un vector unitario tangencial en la dirección de integración sobre *C*, y **n** es un vector unitario normal a *S*.

Fórmula de Leibniz para la diferenciación de una integral de volumen

Si *V* es un volumen de control móvil dentro de una superficie *S*, y $\mathbf{v}_s$ es la velocidad de cualquier elemento sobre dicha superficie, y si a es una función escalar de posición y tiempo a(x, y, z, t):

$$\frac{d}{dt} \int_V a dV = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + \int_s a(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) dS$$